

WALTER BERNARD

# PHYSIK

GRUNDKURS

ZWEITER TEIL

**TFO**



WALTER BERNARD

# PHYSIK

GRUNDKURS

ZWEITER TEIL



TECHNOLOGISCHE  
FACHOBERSCHULE  
MERAN



CREATIVE COMMONS  
CC-BY-SA 2018

# Inhalt

1	Statisches Gleichgewicht.....	1
1.1	Kräfte im Gleichgewicht.....	1
1.1.1	<i>Resultierende und Kräfteparallelogramm.....</i>	1
1.1.2	<i>Gleichgewicht von drei Kräften.....</i>	2
1.1.3	<i>Zerlegung einer Kraft in Komponenten.....</i>	3
1.1.4	<i>Zerlegung der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene.....</i>	4
1.1.5	<i>Beispiele.....</i>	4
1.1.6	<i>Aufgaben.....</i>	5
1.2	Drehmoment.....	6
1.2.1	<i>Mechanisches Gleichgewicht.....</i>	7
1.2.2	<i>Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt.....</i>	10
1.2.3	<i>Arten des Gleichgewichts.....</i>	12
1.2.4	<i>Stabilität und Kippsicherheit.....</i>	13
1.2.5	<i>Beispiele.....</i>	14
1.2.6	<i>Aufgaben.....</i>	15
2	Bewegung und Kraft.....	16
2.1	Allgemeines über Bewegung.....	16
2.1.1	<i>Geschwindigkeit und Beschleunigung.....</i>	16
2.1.2	<i>Bewegung mit konstanter Beschleunigung.....</i>	18
2.2	Kraft und Beschleunigung.....	19
2.2.1	<i>Gesetzliche Definition der Einheit 1 N – Grundgesetz der Mechanik.....</i>	19
2.2.2	<i>Freier Fall.....</i>	20
2.2.3	<i>Fallen in der Luft – Fallschirmspringen.....</i>	21
2.2.4	<i>Beschleunigung auf der schiefen Ebene.....</i>	22
2.3	Bewegungsenergie.....	23
2.4	Gleichförmige Kreisbewegung.....	26
2.5	Zentralkraft.....	27
2.5.1	<i>Berechnung der Zentralkraft.....</i>	27
2.5.2	<i>Beispiele.....</i>	28
2.6	<i>Aufgaben.....</i>	30
3	Elektromagnetische Kraft.....	31
3.1	Grundlagen des Magnetismus.....	31
3.1.1	<i>Grundlegende magnetische Erscheinungen.....</i>	31
3.1.2	<i>Erklärung des Magnetismus – Elementarmagnete.....</i>	32
3.1.3	<i>Magnetfeld.....</i>	33
3.2	Elektrischer Strom und Magnetfeld.....	34
3.2.1	<i>Magnetfeld des elektrischen Stroms.....</i>	34
3.2.2	<i>Magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter.....</i>	36
3.2.3	<i>Messung des Magnetfelds.....</i>	37
3.2.4	<i>Berechnung der elektromagnetischen Kraft.....</i>	38
3.2.5	<i>Leiterschleife und Spule im Magnetfeld.....</i>	40
3.2.6	<i>Kraft zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern.....</i>	41
3.2.7	<i>Definition der Maßeinheit Ampere.....</i>	41
3.3	Analoge Strommessgeräte.....	42
3.3.1	<i>Drehspulmessgerät.....</i>	42
3.3.2	<i>Dreheisenmessgerät.....</i>	43

3.4 Elektromotoren.....	44
3.4.1 <i>Gleichstrommotoren</i> .....	44
3.5 Magnetfeld einer Spule – Magnetische Permeabilität.....	45
3.5.1 <i>Magnetfeld einer Spule</i> .....	45
3.5.2 <i>Magnetische Permeabilität</i> .....	46
3.6 Kraft auf bewegte Ladungen - Lorentzkraft.....	47
3.6.1 <i>Ablenkung einer bewegten Ladung im Magnetfeld</i> .....	48
3.6.2 <i>Kathodenstrahlröhre</i> .....	48
3.7 Beispiele.....	50
3.7.1 <i>Aufgaben</i> .....	50
4 Elektromagnetische Induktion.....	51
4.1 Induktion in bewegten Leitern.....	51
4.1.1 <i>Induktion in einer rotierenden Leiterschleife</i> .....	52
4.1.2 <i>Erzeugung einer Gleichspannung - Kommutator</i> .....	52
4.2 Elektromagnetische Induktion und magnetischer Fluss.....	53
4.2.1 <i>Magnetischer Fluss - Induktionsgesetz</i> .....	54
4.3 Induktion und Energie.....	56
4.3.1 <i>Lenz'sches Gesetz</i> .....	57
4.4 Generatoren.....	58
4.4.1 <i>Gleichspannungsgeneratoren</i> .....	58
4.4.2 <i>Wechselspannungsgeneratoren</i> .....	59
4.4.3 <i>Dreiphasenstrom (Drehstrom)</i> .....	59
4.5 Transformator.....	60
4.5.1 <i>Funktionsprinzip des Transformators</i> .....	60
4.5.2 <i>Zusammenhang zwischen Spannung und Strom beim Transformator</i> .....	61
4.5.3 <i>Verluste des Transformators</i> .....	62
4.5.4 <i>Übertragung der elektrischen Energie</i> .....	63
4.6 Aufgaben.....	65

# 1 Statisches Gleichgewicht

## 1.1 Kräfte im Gleichgewicht

### 1.1.1 Resultierende und Kräfteparallelogramm

#### Versuch 1 - Resultierende

Die beiden Kräfte  $F_1 = 2,7 \text{ N}$  und  $F_2 = 1,4 \text{ N}$  verlängern die Feder von Fig. 1 um die Strecke  $s$ . Die selbe Verlängerung erzielt man auch wenn man nur mit der Kraft  $F_R = 3,0 \text{ N}$  zieht. Das bedeutet, dass die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  zusammen dieselbe Wirkung haben, wie die Kraft  $F_R$  alleine. Man nennt  $F_R$  resultierende Kraft oder **Resultierende** der Kräfte  $F_1$  und  $F_2$ .

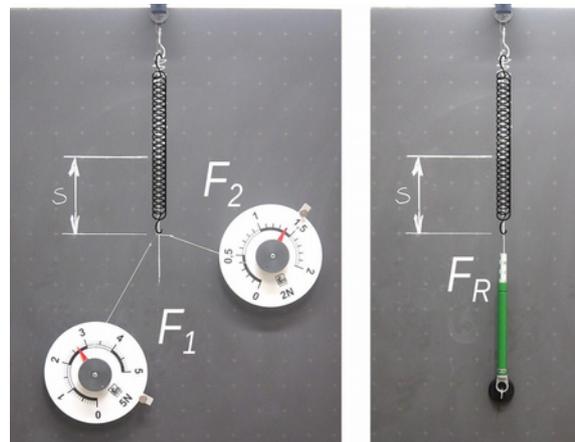


Fig. 1 Gleiche Verlängerung der Feder

Allgemein gilt:

Die **Resultierende** von mehreren Kräften ist die Kraft, welche alleine die selbe Wirkung hat, wie die betrachteten Kräfte zusammen.

Um die Resultierende von mehreren Kräften zu bestimmen, darf man nicht einfach die Summe der Beträge der Einzelkräfte bilden. Man sieht ja im obigen Versuch, dass

$$F_1 + F_2 = 2,7 \text{ N} + 1,4 \text{ N} = 4,1 \text{ N} > 3,0 \text{ N} = F_R$$

Kräfte sind Vektoren und deshalb ist nicht nur ihr Betrag, sondern auch ihre Richtung von Bedeutung. Die Resultierende mehrerer Kräfte erhält man nur, wenn man eine sogenannte **Vektorsumme** bildet.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R$$

Wenn nur zwei Kräfte wirken, dann kann man die Vektorsumme leicht mit einem **Kräfteparallelogramm** Ermitteln. Man kann es folgendermaßen konstruieren:

- Zunächst wird für die Kräfte ein geeigneter Maßstab festgelegt.
- Die gegebenen Kräfte werden maßstabsgetreu als Pfeile mit der richtigen Richtung gezeichnet.
- Parallel zu den Wirkungslinien der gegebenen Kräfte werden Hilfslinien gezeichnet um ein Parallelogramm zu konstruieren.
- Die Diagonale des Parallelogramms entspricht dann dem Vektor der Resultierenden.

Die Vorgangsweise ist in der folgenden Fig. 2 dargestellt.

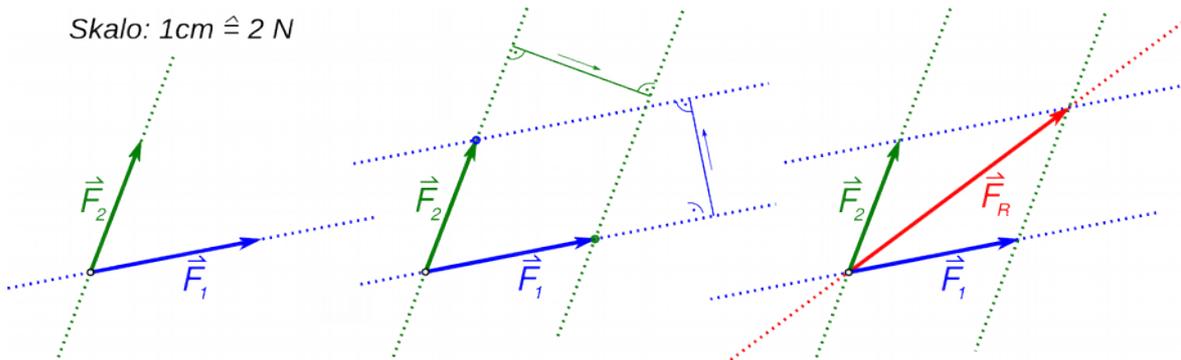


Fig. 2: Konstruktion des Kräfteparallelogramms

## 1 Statisches Gleichgewicht

Wenn zwei Kräfte senkrecht zueinander stehen, dann kann man den Betrag der Resultierenden nicht nur mit Hilfe eines Parallelogramms, sondern auch mit dem Satz von Pythagoras <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup> bestimmen. In diesem Fall ist der Betrag der Resultierenden:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

### Beispiel 1 - Telegrafmast

Beim Telegrafmast von Fig. 3 zieht ein Draht mit 440 N nach Osten und der andere mit 280 N nach Süden.

Wie groß sind Betrag und Richtung der Resultierenden?

**Lösung**

$$F_1 = 440 \text{ N} \quad F_2 = 280 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(440 \text{ N})^2 + (280 \text{ N})^2} = 522 \text{ N}$$

Um die Richtung der Resultierenden zu finden muss man das Kräfteparallelogramm konstruieren. Daraus ergibt sich  $\alpha = 32^\circ$ . Man sieht auch, dass die Länge des Pfeils, welcher die Resultierende darstellt, dem Betrag nach den Wert wiedergibt, den man aus dem Satz von Pythagoras erhalten hat.

**Antwort:**

Der Betrag der Resultierenden ist 520 N und sie zieht mit einem Winkel von  $32^\circ$  nach Süd-Osten.

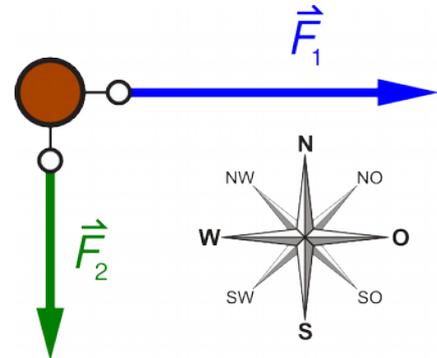
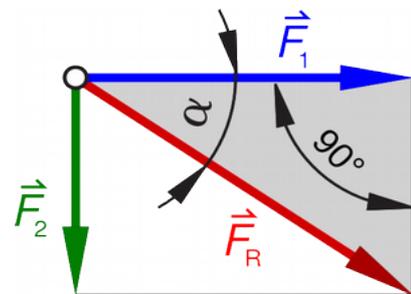


Fig. 3: Telegrafmast



Skalo: 1cm  $\hat{=}$  100 N

Fig. 4:

### 1.1.2 Gleichgewicht von drei Kräften

Eine punktförmige Masse (oder ein Körper) ist im Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme aller Kräfte, die darauf wirken Null ist. Daraus folgt, dass drei Kräfte, welche im selben Punkt angreifen, dann im Gleichgewicht sind, wenn die Resultierende von zwei von ihnen den selben Betrag hat wie die dritte und entgegengesetzt dazu gerichtet ist (siehe Fig. 5).

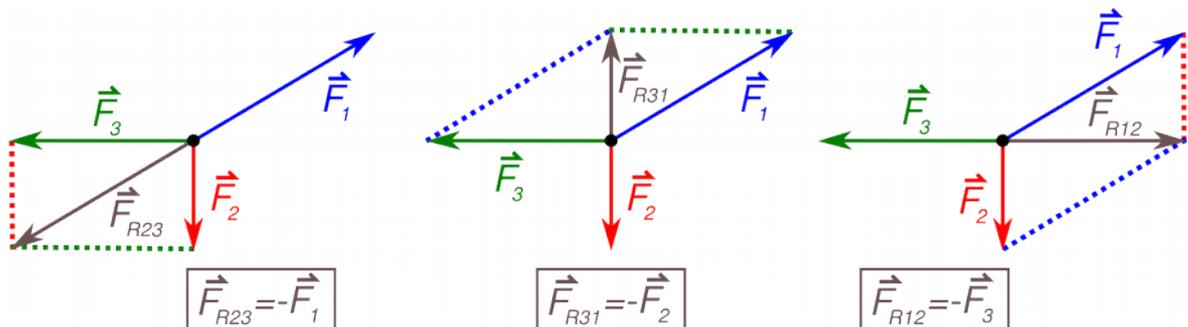


Fig. 5: Die Resultierende von zwei Kräften hält die dritte im Gleichgewicht.

- 1 **Pythagoras** (570 v.C. - ~510 v.C.) War ein griechische Philosoph und Mathematiker. Dreißigjährig kam er nach Crotona in Süditalien wo er eine Philosophenschule leitete.
- 2 Mit den Methoden der Trigonometrie kann man den Betrag und die Richtung der Resultierenden auch dann berechnen, wenn die Kräfte nicht senkrecht zueinander stehen.

### 1.1.3 Zerlegung einer Kraft in Komponenten

In der Praxis ist es häufig der Fall, dass eine äußere Kraft, welche auf eine Konstruktion einwirkt, von mehreren Kräften im Gleichgewicht gehalten wird, deren Richtung bekannt ist. Beispiel zeigt die folgende Fig. 6.

Links halten die Stäbe 1 und 2 die Gewichtskraft der Lampe im Gleichgewicht. Die Stäbe sind an ihren Enden drehbar befestigt bzw. verbunden und folglich wirken die Kräfte entlang ihrer Achsen.

Rechts wird die Gewichtskraft der Lampe von zwei Kräften im Gleichgewicht gehalten, welche in Richtung der Seile 1 und 2 wirken.

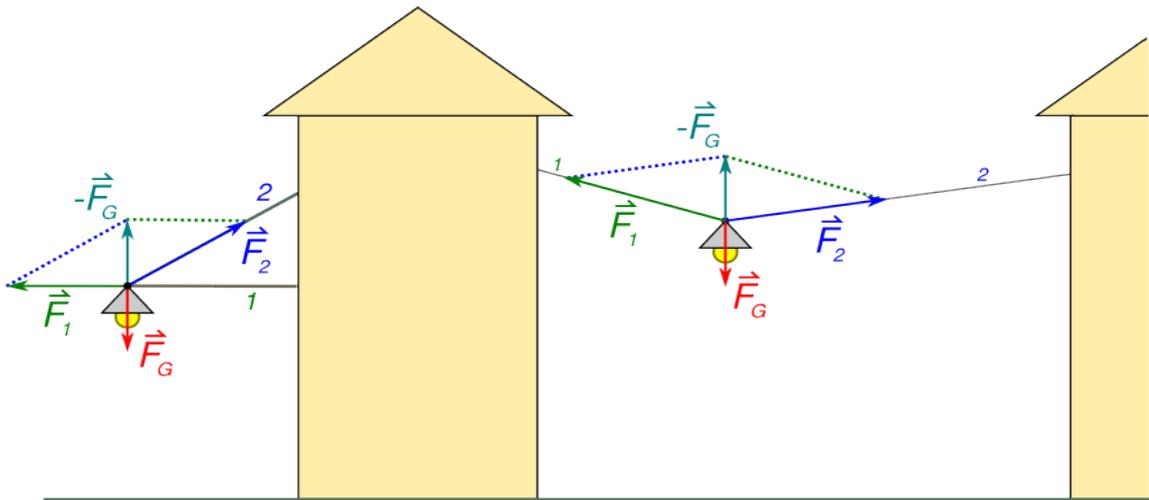


Fig. 6: Straßenlampen

Um die Kräfte zu ermitteln, welche die einzelnen Konstruktionselemente belasten, muss man die angreifende äußere Kraft in Komponenten zerlegen. Dies kann man mit Hilfe eines Parallelogramms machen, in welchem die gegebene Kraft die Diagonale darstellt.

Die Vorgangsweise ist in Fig. 7 dargestellt :

- Zunächst wird für die Kräfte ein geeigneter Maßstab festgelegt.
- Die gegebene Kraft wird maßstabsgetreu und mit der richtigen Richtung als Pfeil dargestellt.
- Die Wirkungslinien der gesuchten Kräfte werden eingezeichnet.
- Parallel zu den Wirkungslinien der gesuchten Kräfte werden Hilfslinien gezeichnet und zwar so, dass die gegebene Kraft zur Diagonale eines Parallelogramms wird.

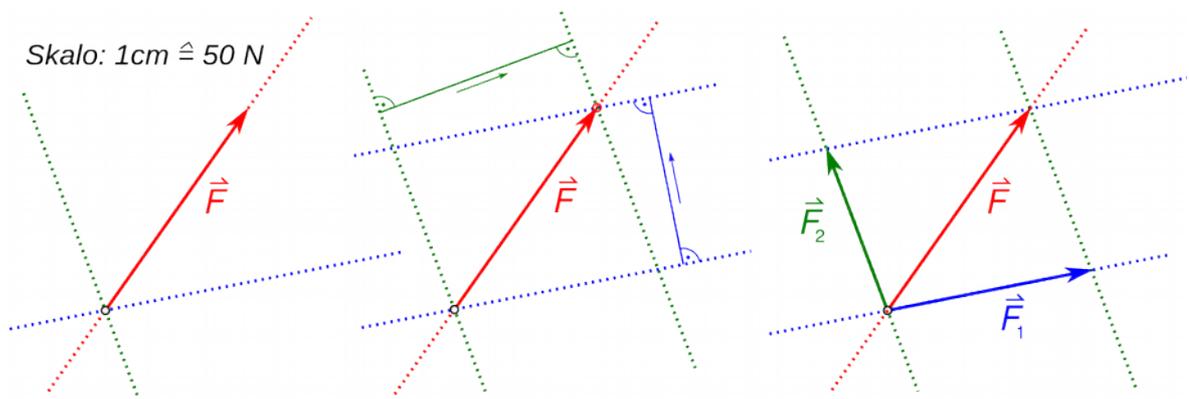


Fig. 7: Zerlegung einer Kraft

### 1.1.4 Zerlegung der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene

In Kapitel 5 des ersten Bandes wurde die Kraft, welche notwendig ist um einen Körper entlang einer schiefen Ebene nach oben zu rollen (siehe Fig. 8), mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes bestimmt

$$F_G \cdot h = F_Z \cdot s \rightarrow F_Z = \frac{F_G \cdot h}{s}$$

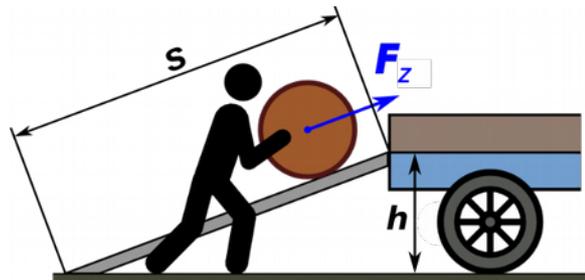


Fig. 8

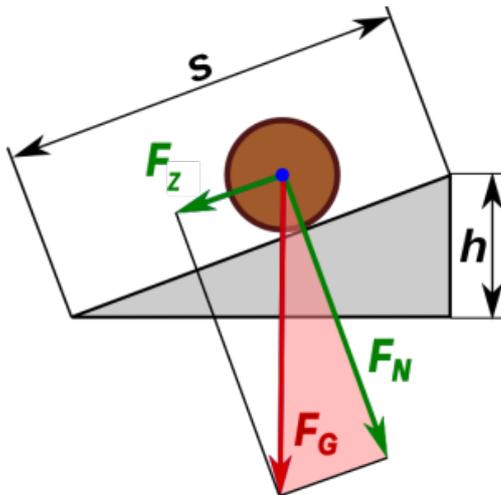


Fig. 9 Zerlegung der Gewichtskraft

Man kann die Kraft  $F_Z$  auch durch Zerlegung der Gewichtskraft  $F_G$  in zwei Komponenten bestimmen. Die eine Komponente  $F_Z$  wirkt entlang der schiefen Ebene und schiebt den Körper nach oben, die zweite Komponente  $F_N$  wirkt senkrecht zur schiefen Ebene und drückt den Körper auf die Ebene.

Wegen der Ähnlichkeit des Kräfte Dreiecks (rosa) mit dem Dreieck der schiefen Ebene (grau siehe Fig. 9) erhält man:

$$\frac{F_Z}{h} = \frac{F_G}{s} \rightarrow F_Z = \frac{F_G \cdot h}{s}$$

### 1.1.5 Beispiele

#### Beispiel 2 - Mauerkran

Am Mauerkran von Fig. 10 hängt ein Metallzylinder mit einer Masse von 130 kg.

Bestimme die Kräfte in den Stangen 1 und 2.

Lösung

$$m = 130 \text{ kg} \rightarrow F_G = m \cdot g = 1275 \text{ N} = 1,28 \text{ kN}$$

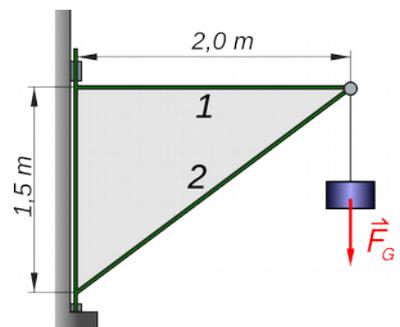


Fig. 10: Mauerkran

Wenn die Stangen an ihren Enden drehbar gelagert sind, dann wirken die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  in Richtung der Stangen. Man kann die Komponenten mit der in Fig. 7 dargestellten Methode bestimmen. Das Ergebnis zeigt die Fig. 11.

$$F_1 = 1,7 \text{ kN} \quad F_2 = 2,15 \text{ kN}$$

Mit Hilfe der Ähnlichkeit der grauen Dreiecke kann man die Kräfte auch berechnen.

$$\frac{F_1}{2,0} = \frac{F_G}{1,5} \rightarrow F_1 = \frac{F_G \cdot 2,0}{1,5} = 1,7 \text{ kN}$$

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + F_G^2} = 2,13 \text{ kN}$$

Die Ergebnisse stimmen weitgehend überein.

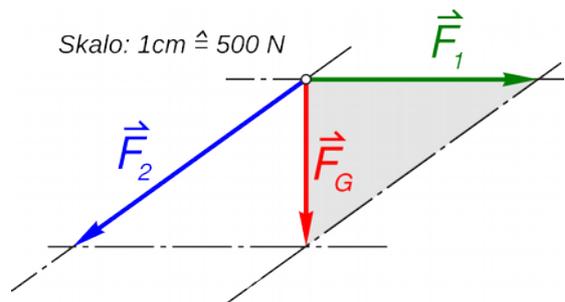


Fig. 11: Zerlegung von  $F_G$

**Beispiel 3 -Straßenlampe**

Die Masse der Straßenlampe in Fig. 12 beträgt 9,5 kg.

Wie groß sind die Kräfte in den Seilen 1 und 2?

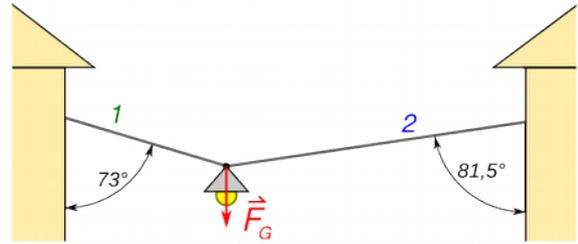


Fig. 12: Straßenlampe an zwei Seilen

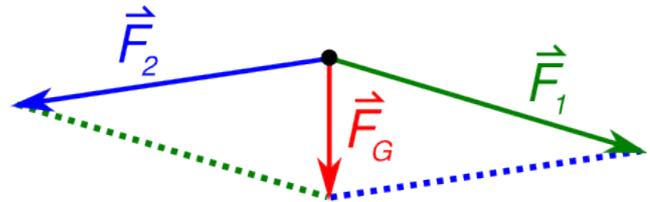
**Lösung**

$$m = 9,5 \text{ kg} \rightarrow F_G = m \cdot g = 93 \text{ N}$$

Die Richtung der Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  ist gleich jener der Seile.

Man kann die Komponenten durch eine Zerlegung bestimmen (siehe Par. 1.1.3 Fig. 7).

Das Ergebnis zeigt Fig. 13.



Skalo: 1cm  $\hat{=}$  50 N

Fig. 13: Zerlegung der Gewichtskraft

$$F_1 = 214 \text{ N} \quad F_2 = 207 \text{ N}$$

**1.1.6 Aufgaben**

- Die beiden Kraftmesser von Fig. 15 zeigen die selbe Kraft von 2,5 N an. Der Winkel beträgt  $\alpha = 120^\circ$ . Bestimme die Masse des Wägestücks!

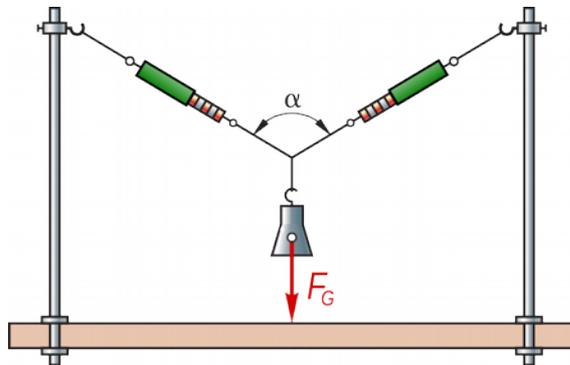


Fig. 15

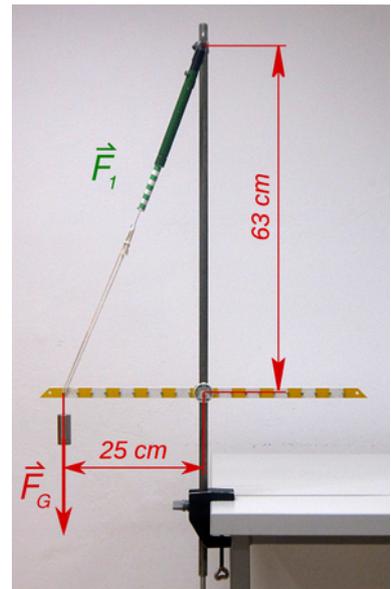


Fig. 14

- Wenn das Wägestück in Fig. 15 hat eine Masse von 500 g hat und der Winkel  $\alpha = 120^\circ$  beträgt, wie groß ist dann die Kraft in den Kraftmessern?
- Im Versuchsaufbau von Fig. 14 zeigt der Kraftmesser  $F_1 = 2,1 \text{ N}$  an. Bestimme die Masse des angehängten Wägestücks!

**Lösungen**

- Die Masse beträgt 250 g.
- Die Kraft in den Kraftmessern beträgt 4,9 N.
- Die Masse beträgt 200 g.

## 1.2 Drehmoment

### Versuch 2 - Drehmoment

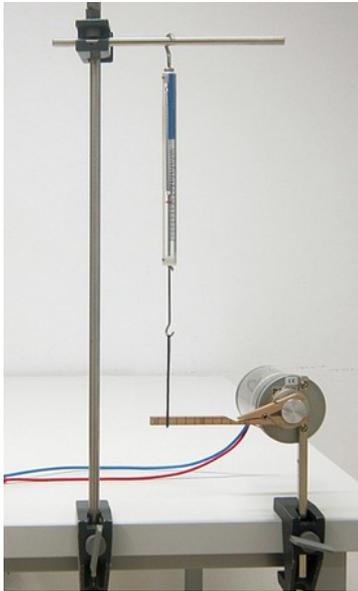


Fig. 17

Der Motor von Fig. 16 dreht sich und seine Welle wird durch die Holzklammer gebremst. Um das Drehen der Klammer zu verhindern wird sie durch die Kraft  $F$  gehalten, welche mit dem Kraftmesser gemessen wird. Der Wert der Kraft  $F$  ändert sich in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zwischen der rotierenden Welle und dem Befestigungspunkt der Kraft.

Wenn man beachtet, dass die Kraft stets senkrecht zum verlängerten Arm der Klammer wirkt und der Motor stets gleich dreht, dann ergeben sich die Werte der folgenden Tabelle 1.

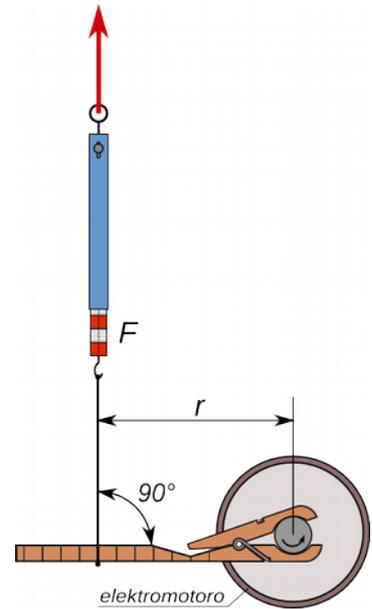


Fig. 16

$r$ [cm]	$F$ [N]	$F \cdot r$ [Ncm]
6,0	1,76	10,6
7,0	1,52	10,6
8,0	1,34	10,7
9,0	1,18	10,6
10,0	1,06	10,6
11,0	0,96	10,6
12,0	0,85	10,2
13,0	0,78	10,1
14,0	0,73	10,2
15,0	0,69	10,4

Tab. 1

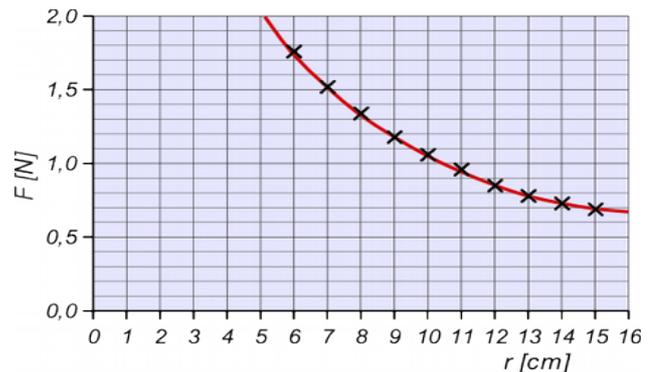


Fig. 18

Aus Tab. 1 ergibt sich, dass in allen Fällen das Produkt aus dem Abstand  $r$  und der Kraft  $F$  ungefähr gleich groß ist. Das heißt also, dass für den Motor der unter bestimmten konstanten Bedingungen dreht gilt dass:

$$F \cdot r = \text{konstant}$$

Das Produkt  $F \cdot r$  heißt **Drehmoment  $M$** . Praktisch gibt der in Versuch 2 gefundene Wert das Drehmoment an, welches der Motor unter den Bedingungen der Versuchs abgibt.

Im Allgemeinen ist das Drehmoment bezogen auf einen beliebigen Punkt  $O$ , gleich dem Produkt der Kraft  $F$  und dem Abstands  $r$  zwischen der Wirkungslinie der Kraft und dem Punkt  $O$  (siehe Fig. 19).

$$M = F \cdot r$$

$r$  ist der **Hebelarm** der Kraft  $F$  bezogen auf den Drehpunkt  $O$ .

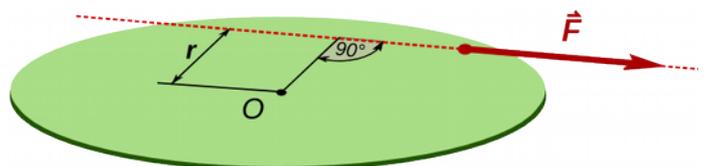


Fig. 19

Beispiel 4 - Drehmomentschlüssel (3)

Wie groß ist das Drehmoment, welches die Kraft  $F = 250\text{ N}$  in der dargestellten Situation erzeugt ?

Lösung

Die Aufgabe kann auf verschiedene Arten gelöst werden.

a) Mit einer maßstabgerechten Zeichnung Fig. 22 (4) ermittelt man die Länge des Hebelarms

$$r = 31\text{ cm} \rightarrow$$

$$M = F \cdot r = 250\text{ N} \cdot 0,31\text{ m} = 78\text{ Nm}$$

Skalo 1:10

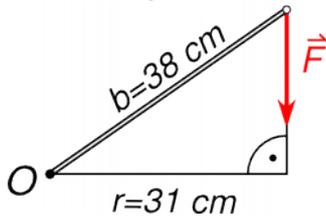
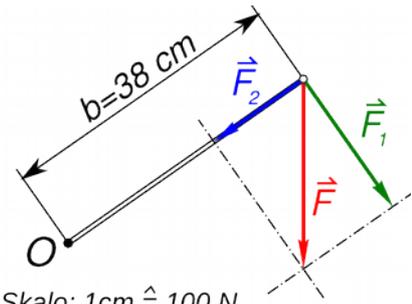


Fig. 22 Lösung a)

b) Man kann die Kraft  $F$  in zwei Komponenten zerlegen,  $F_1$  senkrecht zum Drehmomentschlüssel und  $F_2$  parallel dazu. (siehe Fig. 21).  $F_2$  erzeugt kein Drehmoment, weil die Wirkungslinie durch den Drehpunkt  $O$  geht. Deshalb ist das gesamte Drehmoment jenes von  $F_1$ . Aus dem Parallelogramm ergibt sich:  $F_1 = 205\text{ N} \rightarrow M = F_1 \cdot b = 205\text{ N} \cdot 0,38\text{ m} = 78\text{ Nm}$



Skalo:  $1\text{ cm} \hat{=} 100\text{ N}$

Fig. 21: Lösung b)

Wie erwartet ist das Ergebnis gleich wie bei Lösung a).

1.2.1 Mechanisches Gleichgewicht

Ein mechanisches System (Massenpunkt, System von Massenpunkten, starrer Körper) ist im **mechanischen Gleichgewicht**, wenn die Summe der Kräfte (Kräftegleichgewicht) und die Summe der Drehmomente (Momentengleichgewicht) auf jedes einzelne Element Null ist.

$$1. \sum \vec{F}_i = 0$$

$$2. \sum \vec{M}_i = 0$$

Ein starrer Körper erfährt keinerlei Beschleunigung, er kann sich aber mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen und/oder drehen.

Wie die Kräfte sind auch Drehmomente Vektoren und haben nicht nur einen Betrag sondern auch eine Richtung. Die Richtung des Momentenvektors ist stets senkrecht zur Ebene welche die Kraft  $F$  und der Hebelarm  $r$  bildet (siehe Fig. 23)

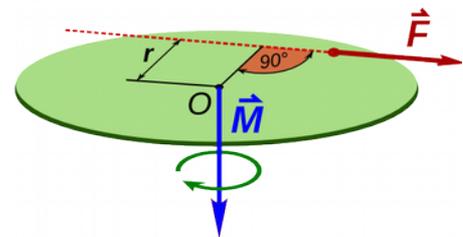


Fig. 23: Rechtsdrehendes Moment

Für die in diesem Buch behandelten Aufgaben genügt es zwischen rechts drehendem und links drehendem Moment zu unterscheiden. Rechts drehend und mathematisch negativ sind die Momente im Uhrzeigersinn. Momente im Gegenuhrzeigersinn sind linksdrehend und mathematisch positiv (siehe Fig. 24). Im Gleichgewicht muss die Summe der rechtsdrehenden Momente gleich der Summe der linksdrehenden sein.

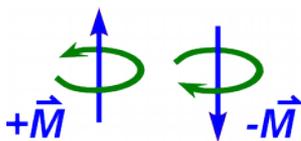


Fig. 24

$$\sum M_r = \sum M_l$$

- 3 Drehmomentschlüssel sind Schraubenschlüssel, bei denen das gewünschte Anzugsmoment eingestellt werden kann.
- 4 Wenn man die Trigonometrie beherrscht, dann kann man die Länge des Hebelarms auch mit folgender Formel berechnen  $r = 38\text{ cm} \cdot \sin \alpha = 38\text{ cm} \cdot \sin 55^\circ = 31\text{ cm}$

## 1 Statisches Gleichgewicht

### Beispiel 5 - Hebel 1

Die Gewichte in Fig. 27 haben eine Masse von jeweils 200 g. Wie groß sind die Kräfte am Federkraftmesser und im Auflagerpunkt  $O$ , wenn der Hebel im Gleichgewicht ist?

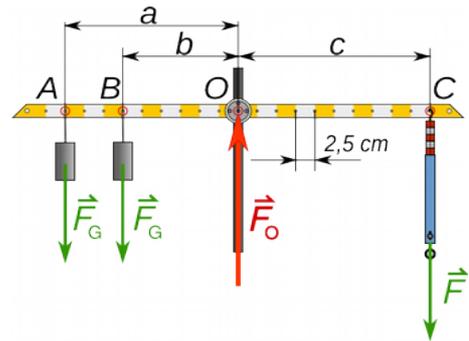


Fig. 25: Hebel im Gleichgewicht

#### Lösung

$$m = 200 \text{ g} \rightarrow F_G = m \cdot g = 1,96 \text{ N}$$

die Abstände sind die folgenden:

$$a = 9 \cdot 2,5 \text{ cm} = 22,5 \text{ cm} \quad b = 6 \cdot 2,5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$c = 10 \cdot 2,5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Man kann die Aufgabe auf verschiedene Weise lösen wobei stets gilt:  $\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum \vec{M}_i = 0$

a) Gleichgewicht gegenüber  $O$  <sup>(5)</sup>

$$\sum M_i = F_G \cdot a + F_G \cdot b - F \cdot c = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{F_G \cdot (a+b)}{c} = \frac{1,96 \text{ N} \cdot 37,5 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 2,94 \text{ N}$$

$$\sum F_i = F_G + F_G - F_O + F = 0 \quad \rightarrow \quad F_O = F_G + F_G + F = 6,86 \text{ N}$$

b) Gleichgewicht gegenüber  $C$

$$\sum M_i = F_G \cdot (a+c) + F_G \cdot (b+c) - F_O \cdot c = 0 \quad \rightarrow \quad F_O = \frac{F_G \cdot (a+b+2c)}{c} = 6,86 \text{ N}$$

$$\sum F_i = F_G + F_G - F_O + F = 0 \quad \rightarrow \quad F = F_O - 2 \cdot F_G = 6,86 \text{ N} - 3,92 \text{ N} = 2,94 \text{ N}$$

Wie erwartet erhält man in beiden Fällen das selbe Ergebnis.

### Beispiel 6 - Hebel 2

Die Gewichte in Fig. 26 haben eine Masse von je 200 g.

Wie groß ist die Kraft im Federkraftmesser, welcher den Hebel über eine Schnur im Gleichgewicht hält?

#### Lösung

$$m = 200 \text{ g} \rightarrow F_G = m \cdot g = 1,96 \text{ N}$$

Aus einer maßstabgetreuen Zeichnung oder durch Rechnung erhält man die Länge des Hebelarms  $r = 23 \text{ cm}$ .

Bezogen auf den Punkt  $O$  erzeugt die Kraft  $F_G$  ein links drehendes Moment  $M_l$ , welches durch das rechts drehende Moment  $M_r$  der Kraft  $F_l$  im Gleichgewicht gehalten wird.

Wegen der Gleichgewichtsbedingung  $M_r = M_l$

$$\rightarrow F_1 \cdot r = F_G \cdot 15 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{F_G \cdot 15 \text{ cm}}{r} = \frac{1,96 \text{ N} \cdot 15 \text{ cm}}{23 \text{ cm}} = 1,3 \text{ N}$$

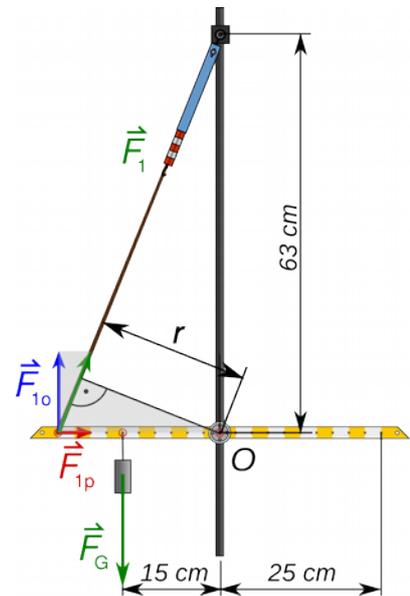


Fig. 26: Hebel im Gleichgewicht

Man kann die Aufgabe auch lösen indem man die Kraft  $F_l$  in eine Komponente  $F_{l_o}$  senkrecht zum Hebel und eine Komponente  $F_{l_p}$  parallel zum Hebel zerlegt.

Dann ist der Hebelarm der rechts drehenden Kraft  $F_{l_o}$  gleich  $25 \text{ cm}$ . Die Kraft  $F_{l_p}$  erzeugt kein Drehmoment, weil ihre Wirkungslinie durch den Punkt  $O$  verläuft.

5 In diesen Aufgaben geht man davon aus, dass der Hebel selber ohne äußere Kräfte im Gleichgewicht ist.

## 1 Statisches Gleichgewicht

Wegen des Gleichgewichts gilt  $F_{1o} \cdot 25 \text{ cm} = F_G \cdot 15 \text{ cm} \rightarrow F_{1o} = \frac{F_G \cdot 15 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 1,18 \text{ N}$

Wegen der Ähnlichkeit der grauen Dreiecke  $\frac{F_1}{F_{1o}} = \frac{25 \text{ cm}}{r} \rightarrow F_1 = \frac{F_{1o} \cdot 25 \text{ cm}}{23 \text{ cm}} = 1,3 \text{ N}$

Die Ergebnisse stimmen also überein.

Dasselbe Ergebnis könnte man auch mit zeichnerischen Methoden erhalten.

### Beispiel 7 - Straßenlampe

Die Straßenlampe von Fig. 27 hat eine Masse von 13 kg.-

Die Längen in der Abbildung sind  $a = 2,4 \text{ m}$ ,  $b = 1,4 \text{ m}$ .

Untersuche das mechanische Gleichgewicht der Lampe so wie der Stangen 1 und 2.

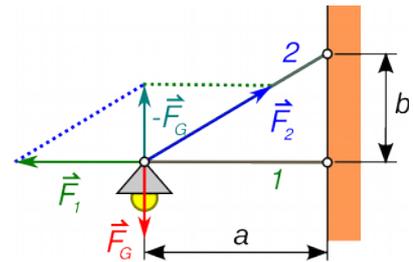


Fig. 27

#### Lösung

$$m = 13 \text{ kg} \rightarrow F_G = m \cdot g = 128 \text{ N}$$

Durch Zerlegung der Kraft  $F_G$  in Richtung der Stangen 1 und 2 findet man die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$ . Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke kann man die Kräfte einfach berechnen.

$$\frac{F_1}{a} = \frac{F_G}{b} \rightarrow F_1 = \frac{F_G \cdot a}{b} = \frac{128 \text{ N} \cdot 2,4 \text{ m}}{1,4 \text{ m}} = 219 \text{ N}$$

$$F_2 = \sqrt{F_G^2 + F_1^2} = 254 \text{ N}$$

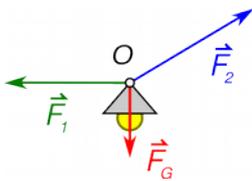


Fig. 29

a) Gleichgewicht der Lampe (Fig. 29)

Die drei Kräfte greifen im selben Punkt  $O$  an. Sie erzeugen kein Drehmoment und halten sich im Gleichgewicht.

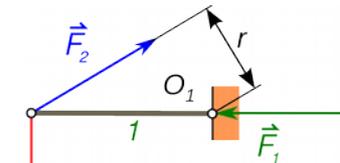


Fig. 28

b) Gleichgewicht der Stange 1 (Fig. 28)

Bezogen auf den Punkt  $O_1$  erzeugt die Kraft  $F_G$  ein links drehendes Moment und die Kraft  $F_2$  ein rechts drehendes. Aus einer maßstabgetreuen Zeichnung oder durch Berechnung erhält man die Länge des Hebelarms  $r = 1,2 \text{ m}$

$$M_l = F_G \cdot a = 128 \text{ N} \cdot 2,4 \text{ m} = 307 \text{ Nm}$$

$$M_r = F_2 \cdot r = 254 \text{ N} \cdot 1,2 \text{ m} = 305 \text{ Nm}$$

Im Rahmen der Rechengenauigkeit ist  $M_r = M_l$  und folglich ist die Stange im Gleichgewicht.

c) Gleichgewicht der Stange 2 (Fig. 30)

Bezogen auf den Punkt  $O_2$  erzeugt die Kraft  $F_G$  ein links drehendes und die Kraft  $F_1$  ein rechts drehendes Moment.

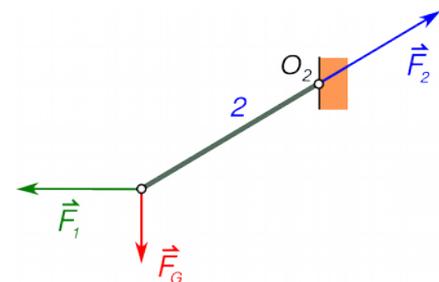


Fig. 30

$$M_r = F_G \cdot a = 128 \text{ N} \cdot 2,4 \text{ m} = 307 \text{ Nm} \quad M_l = F_1 \cdot b = 219 \text{ N} \cdot 1,4 \text{ m} = 307 \text{ Nm}$$

Es ist  $M_r = M_l$  und das Gleichgewicht ist gegeben.

### 1.2.2 Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt

Wenn man einen Körper an drei Punkten unterstützt, dann sind die drei Kräfte immer in der Lage die Gewichtskraft des Körpers im Gleichgewicht zu halten. Wenn man die Gewichtskraft aber mit nur einer Kraft im Gleichgewicht halten will, dann muss man einen ganz bestimmten Punkt suchen, den **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt**. Einen einfachen Versuch dazu zeigen Fig. 31/ Fig. 33 .



Fig. 32



Fig. 31



Fig. 33

Es ist relativ leicht, das Buch mit drei Fingern zu halten und das auch in verschiedenen Positionen. Das Buch auf zwei Fingern zu balancieren ist etwas schwieriger und nur in bestimmten Positionen möglich. Wenn man das Buch auf einem Finger im Gleichgewicht halten will, dann gibt es nur mehr einen Punkt, wo dies möglich ist. In diesem Fall geht die Wirkungslinie der Stützkraft durch den Schwerpunkt des Buches, welcher sich genau über dem Stützpunkt befinden muss.

Der **Schwerpunkt** eines starren Körpers ist also der Punkt, in welchem die Gewichtskräfte aller Einzelteile des Körpers durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht gehalten werden können. Der Betrag dieser Kraft ist gleich der Gewichtskraft des gesamten Körpers. Der Schwerpunkt ist also auch der Punkt, in welchem die Gesamtgewichtskraft eines Körpers angreift.



Fig. 34: Gleichgewicht auf der Spitze des Kugelschreibers

Ein anderer Versuch, der das Konzept gut veranschaulicht, ist in Fig. 34 dargestellt. Der gesamte zusammengesetzte Körper aus zwei Gabeln, Korken und Zahnstocher hat seinen Schwerpunkt genau über der Spitze des Kugelschreibers. Deshalb ist er im Gleichgewicht.

In homogenen Körpern, welche überall aus dem selben Material bestehen, gehen alle Symmetrieachsen durch den Schwerpunkt. Der Kreuzungspunkt von zwei Symmetrieachsen ist also der Schwerpunkt.

#### Beispiel 8 - Schwerpunkt 1

Die gesamte Masse des Autos in Fig. 35 beträgt 140 g. Für die Kraft, welche auf die Vorderachse wirkt findet man  $F_A = 0,62 \text{ N}$ . Der Abstand zwischen den Radachsen beträgt  $l = 8,5 \text{ cm}$ .

In welchem Abstand  $a$ , befindet sich der Schwerpunkt?

**Lösung**  $m = 140 \text{ g} \rightarrow F_G = m \cdot g = 1,37 \text{ N}$

Die Gewichtskraft wirkt im Schwerpunkt. Deshalb gilt für das Gleichgewicht der Momente in Punkt B (Hinterachse):

$$F_A \cdot l = F_G \cdot b \rightarrow b = \frac{F_A \cdot l}{F_G} = 3,8 \text{ cm} \rightarrow a = l - b = 4,7 \text{ cm}$$

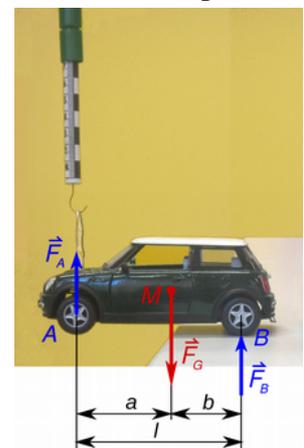


Fig. 35

Versuch 3 - Besen im Gleichgewicht

Auf zwei Fingern kann man den Besen problemlos im Gleichgewicht halten, wenn sich der Schwerpunkt zwischen den Fingern befindet (siehe Fig. 36 a).

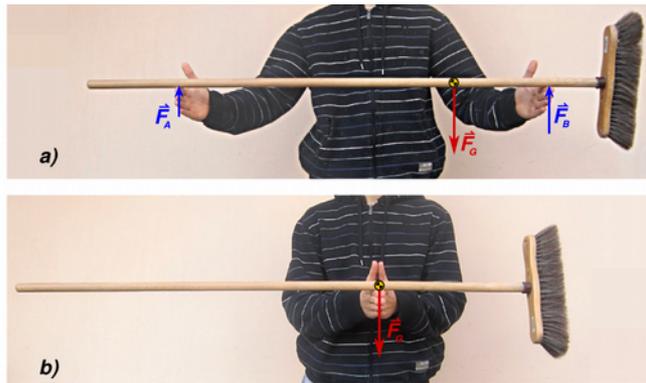


Fig. 36 Besen im Gleichgewicht

Wenn man die beiden Finger aneinander annähert, dann bewegen sie sich abwechselnd relativ zum Besenstiel und treffen sich schließlich dann, wenn sich der Schwerpunkt des gesamten Besens genau über dem Punkt zwischen den beiden Fingern befindet. Der Grund dafür ist leicht verständlich.

Damit sich ein Finger relativ zum Stiel bewegt, muss die Reibungskraft zwischen Stiel und Finger überwunden werden. Diese Kraft ist um so größer, je größer die Auflagerkraft ist, mit der der Besen auf dem Finger lastet. Diese wiederum ist um so größer, je näher der Finger am Schwerpunkt ist. Es bewegt sich also immer der Finger, der weiter vom Schwerpunkt entfernt ist und schließlich treffen sie sich im Schwerpunkt.

Beispiel 9 - Hammer

Die gesamte Masse des Hammers von Fig. 37 beträgt 740 g. Die Abmessungen im Bild sind  $a = 29,8 \text{ cm}$  und  $b = 2,8 \text{ cm}$ . Aus einem Versuch erhält man den Abstand des Schwerpunkts vom Punkt  $O$   $c = 3,8 \text{ cm}$ .

Wie groß ist jeweils die Masse des Hammerkopfs und des Hammerstiels?

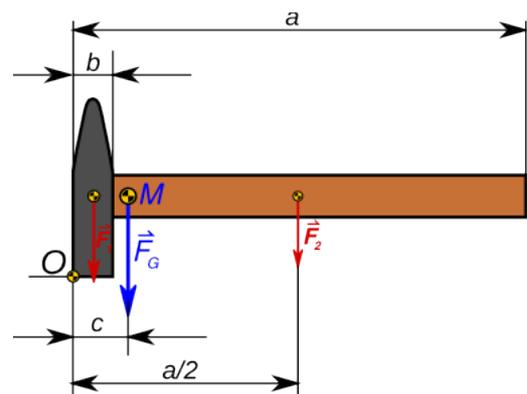


Fig. 37

Lösung

Masse des ganzen Hammers  $m = 740 \text{ g}$

Die gesamte Gewichtskraft  $F_G$  greift im Schwerpunkt an und muss dieselbe Wirkung erzeugen, wie die Gewichtskräfte der beiden Einzelteile zusammen.

Bezogen auf den Punkt  $O$  ergibt sich für die Gleichheit der Drehmomente:

$$F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \cdot \frac{a}{2} = F_G \cdot c \quad \rightarrow \quad F_1 \cdot \frac{b}{2} + (F_G - F_1) \cdot \frac{a}{2} = F_G \cdot c \quad \rightarrow \quad F_1 \cdot \frac{b}{2} - F_1 \cdot \frac{a}{2} = F_G \cdot (c - \frac{a}{2})$$

$$F_1 = \frac{2 \cdot F_G \cdot (c - \frac{a}{2})}{b - a} = \frac{2 \cdot F_G \cdot (3,8 \text{ cm} - \frac{29,8 \text{ cm}}{2})}{2,8 \text{ cm} - 29,8 \text{ cm}} = 0,82 \cdot F_G$$

$$F_G = m \cdot g \quad F_1 = m_1 \cdot g \quad \rightarrow \quad m_1 = 0,82 \cdot m = 608 \text{ g} \quad m_2 = m - m_1 = 132 \text{ g}$$

Antwort

Die Masse des Hammerkopfs beträgt 608 g und die Masse des Stiels 132 g.

**Beispiel 10 - Bausteine**

Der Körper von Fig. 38 besteht aus fünf LEGO - Bausteinen. Die Masse eines Bausteins beträgt  $m_m$  und die Länge  $a = 3,2 \text{ cm}$ .

Berechne den Abstand  $x$ , an dem sich die Schwerpunkt des Körpers befindet.

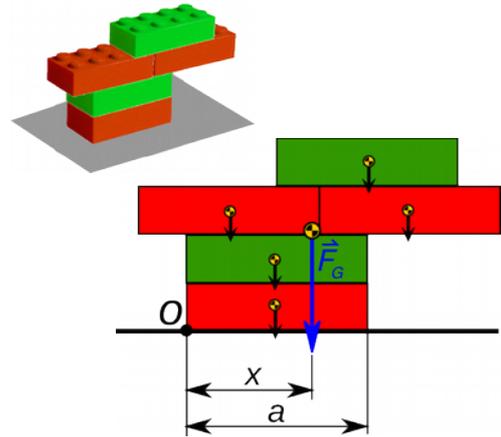


Fig. 38

**Lösung**

Bezogen auf den Punkt  $O$  gilt:  $F_G \cdot x = \sum F_n \cdot x_n$

$$F_G = 5 \cdot F_n = 5 \cdot m_m \cdot g \rightarrow 5 \cdot m_m \cdot x = \sum m_n \cdot x_n$$

$$\rightarrow 5 \cdot m_m \cdot x = 2 \cdot m_m \cdot \frac{a}{2} + m_m \cdot \frac{a}{4} + m_m \cdot \frac{5a}{4} + m_m \cdot a$$

$$\rightarrow 5 \cdot x = \frac{14a}{4} \rightarrow x = 0,7 \cdot a = 2,24 \text{ cm}$$

**1.2.3 Arten des Gleichgewichts**

Alle drei Körper von Fig. 39 sind im Gleichgewicht, weil die Wirkungslinie der Stützkraft durch den Schwerpunkt  $S$  geht. Die Art des Gleichgewichts ist in den drei Positionen jedoch verschieden.

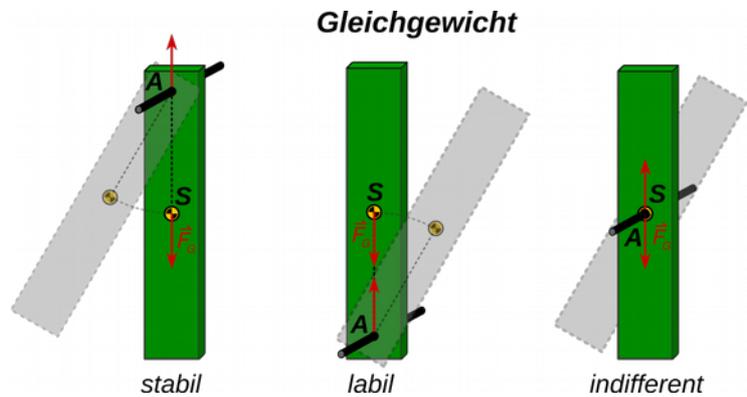


Fig. 39: Arten des Gleichgewichts

Links ist der Körper im **stabilen Gleichgewicht**. Nach einer kleinen Störung wirkt die Gewichtskraft so, dass der Körper in die Gleichgewichtsposition zurückkehrt.

Der mittlere Körper ist im **labilen Gleichgewicht**. Nach einer kleinen Störung zieht die Gewichtskraft den Körper vollständig aus dem Gleichgewicht.

Der rechte Körper befindet sich im **indifferenten Gleichgewicht**. Nach einer kleinen Störung befindet sich der Körper in einer neuen Gleichgewichtsposition.

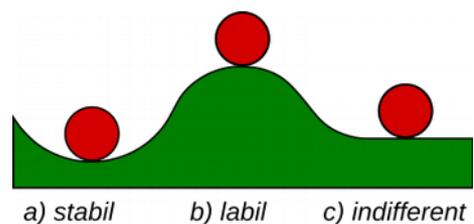
Auch Fig. 40 zeigt Körper im stabilen, labilen und indifferenten Gleichgewicht.

Man kann die Arten des Gleichgewichts auch über die potentielle Energie eines Körpers definieren.

In der Position a) hat die potentielle Energie ein Minimum. Um den Körper aus dieser Position zu verschieben, muss Energie zugeführt werden.

In der Position b) hat die potentielle Energie ein Maximum. Wenn der Körper diese Position verlässt wird Energie frei.

In Position c) ändert sich die potentielle Energie in der Umgebung nicht. Auch die umgebenden Punkte sind Gleichgewichtspositionen.



a) stabil

b) labil

c) indifferent

Fig. 40

### 1.2.4 Stabilität und Kippsicherheit

Konstruktionen und Maschinen müssen stets im stabilen Gleichgewicht sein.

Um ein Umkippen zu verhindern, muss das stabilisierende Moment oder **Standmoment** bezogen auf einen Kippunkt **O** größer sein als das **Kippmoment**.

$$M_S > M_K$$

Als **Kippsicherheit** bezeichnet man den Quotienten aus Standmoment und Kippmoment.

$$s_K = \frac{M_S}{M_K} \rightarrow M_S = s_K \cdot M_K$$

Üblicherweise muss die Kippsicherheit größer sein als

$$s_K = 1,5$$

#### Beispiel 11 - Windgenerator

Für einen kleinen Windgenerator (siehe Fig. 41) rechnet man mit einer maximalen Windkraft  $F_V$  von 3400 N. Die gesamte Masse des Generators samt Mast beträgt 620 kg und die Masse des Betonfundaments ist 9500 kg. Die im Bild angegebenen Maße sind:

$$h = 12 \text{ m} \quad a = 2,2 \text{ m} \quad b = 1,2 \text{ m}$$

Wie groß ist die Kippsicherheit der Konstruktion?

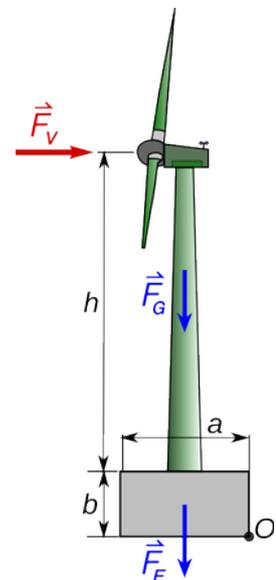


Fig. 41 Windgenerator

#### Lösung

Windkraft  $F_V = 3400 \text{ N}$

Masse Generator und Mast  $m_G = 620 \text{ kg} \rightarrow F_G = m_G \cdot g = 620 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 6080 \text{ N}$

Masse Fundament  $m_F = 9500 \text{ kg} \rightarrow F_F = m_F \cdot g = 9500 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 93100 \text{ N}$

Standmoment bezogen auf O  $M_S = (F_G + F_F) \cdot \frac{a}{2} = (6,1 \text{ kN} + 93,1 \text{ kN}) \cdot 1,1 \text{ m} = 109 \text{ kNm}$

Kippmoment bezogen auf O  $M_R = F_V \cdot (h + b) = 3,4 \text{ kN} \cdot 13,2 \text{ m} = 44,9 \text{ kNm}$

Kippsicherheit  $s_R = \frac{M_S}{M_R} = 109 \frac{\text{kNm}}{44,8 \text{ kNm}} = 2,4 > 1,5$

Wenn auf einen Körper nur Kräfte und keine äußeren Momente wirken, dann ist der Körper im Gleichgewicht, wenn die Wirkungslinie der Resultierenden der einwirkenden Kräfte die Ebene zwischen den möglichen Kippachsen schneidet. In Fig. 42 ist der Körper stabil, weil die Resultierende  $F_R$  zwischen den Punkten  $O_1$  und  $O_2$  verläuft. Er wäre auch stabil, wenn nur die Kraft  $F_G$  wirken würde. In der Position 3 von Fig. 43 ist der Körper im labilen Gleichgewicht, weil der Schwerpunkt genau über der Kippachse  $O_2$  ist.

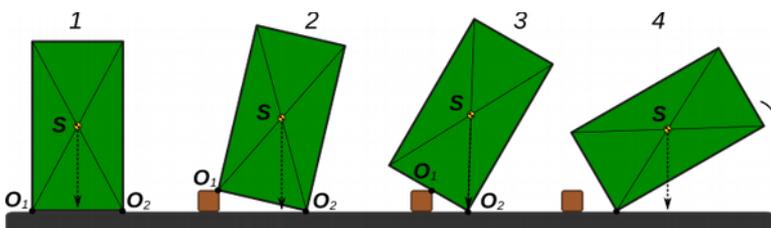


Fig. 43

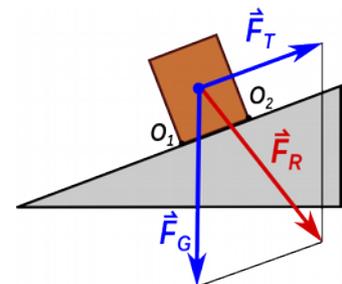


Fig. 42

### 1.2.5 Beispiele

#### Beispiel 12 - Gabelstapler 1

Der Gabelstapler von Fig. 44 hat eine Masse von 2800 kg. Die Masse der gehobenen Kiste beträgt 900 kg. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt und der vorderen Radachse ist  $c=1,0\text{ m}$ . Die übrigen angegebenen Maße sind:

$$a = 1,5 \quad b = 0,8\text{ m}$$

- Wie groß ist die Kraft die auf die vordere bzw. die hintere Radachse wirkt?
- Wie groß ist die Kippsicherheit bezogen auf die vordere Radachse?

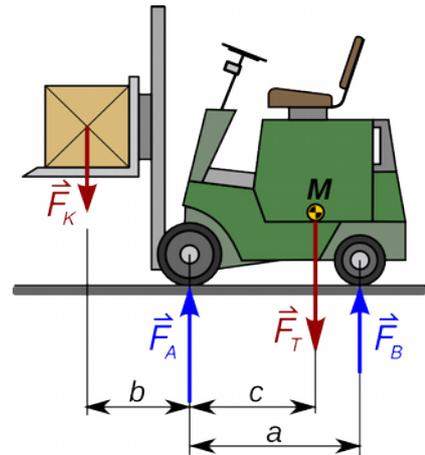


Fig. 44: Gabelstapler

#### Lösung

Masse des ganzen Gabelstaplers  $m_T = 2800\text{ kg} \rightarrow F_T = m_T \cdot g = 2800\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 27,4\text{ kN}$

Masse der Kiste  $m_K = 900\text{ kg} \rightarrow F_K = m_K \cdot g = 900\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 8,82\text{ kN}$

a) Bezogen auf die hintere Radachse ergibt sich für das Gleichgewicht der Momente :

$$F_A \cdot a = F_K \cdot (a+b) + F_T \cdot (a-c) \rightarrow$$

$$\rightarrow F_A = \frac{F_K \cdot (a+b) + F_T \cdot (a-c)}{a} = \frac{8,82\text{ kN} \cdot 2,3\text{ m} + 27,4\text{ kN} \cdot 0,5\text{ m}}{1,5\text{ m}} = 22,7\text{ kN}$$

wegen des Gleichgewichts der Kräfte:

$$F_A + F_B = F_K + F_T \rightarrow F_B = F_K + F_T - F_A = 8,8\text{ kN} + 27,4\text{ kN} - 22,7\text{ kN} = 13,5\text{ kN}$$

b) Bezogen auf die vordere Radachse hat man:

Standmoment  $M_S = F_T \cdot c = 27,4\text{ kN} \cdot 1,0\text{ m} = 27,4\text{ kNm}$

Kippmoment  $M_K = F_K \cdot b = 8,82\text{ kN} \cdot 0,8\text{ m} = 7,1\text{ kNm}$

Kippsicherheit  $s_K = \frac{M_S}{M_K} = \frac{27,4\text{ kNm}}{7,1\text{ kNm}} = 3,9$

#### Beispiel 13 - Gabelstapler 2

Der Gabelstapler von Fig. 44 hat eine Gesamtmasse von 2800 kg und die Abmessungen des vorhergehenden Beispiels.

Wie groß darf die Masse der gehobenen Kiste maximal sein, wenn die Kippsicherheit mindestens  $s_K = 2$  sein muss.

#### Lösung

a) Bezogen auf die vordere Radachse gilt :

Standmoment  $M_S = F_T \cdot c = 27,4\text{ kN} \cdot 1,0\text{ m} = 27,4\text{ kNm}$

Kippmoment  $M_K = F_K \cdot b = \frac{M_S}{s_K} \rightarrow F_K = \frac{M_S}{b \cdot s_K} = \frac{27,4\text{ kNm}}{0,8\text{ m} \cdot 2} = 17,1\text{ kN}$

maximale Masse der Kiste  $m_K = \frac{F_K}{g} = \frac{17100\text{ N}}{9,8\text{ N/kg}} = 1750\text{ kg}$

1.2.6 Aufgaben

1. Der Hammerkopf in Fig. 45 hat eine Masse von 900 g.

Wie groß darf die Masse des Stiels maximal sein, damit der Hammer in der dargestellten Position im stabilen Gleichgewicht ist?

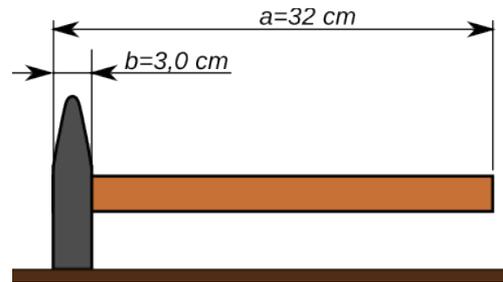


Fig. 45: Hammer auf dem Tisch

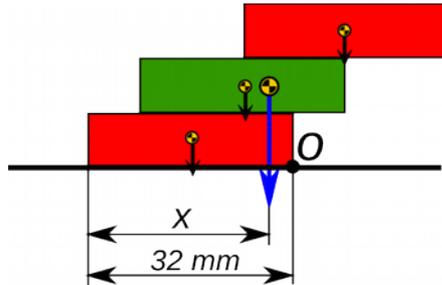


Fig. 46

2. Der Körper von Fig. 46 bestehend aus drei LEGO-Bausteinen ist im Gleichgewicht, weil sich der Schwerpunkt links von der Kippkante O befindet.

Berechne den Abstand x, in welchem sich der Schwerpunkt des gesamte Körpers befindet!



Fig. 47

3. Warum ist das Lineal in Fig. 47 im Gleichgewicht, wenn man den Hammer daran hängt?

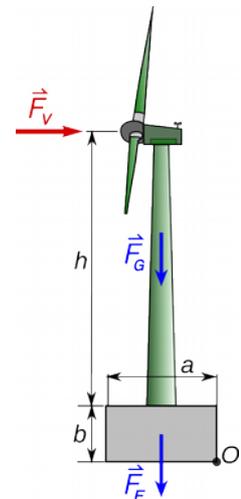


Fig. 48

4. Bei einem kleinen Windgenerator (siehe Fig. 48) rechnet man mit einer maximalen Windkraft von 4000 N. Die gesamte Masse des Generators samt Mast beträgt 620 kg. Die im Bild angegebenen Abmessungen sind:

$$h = 12 \text{ m} \quad a = 2,2 \text{ m} \quad b = 1,2 \text{ m}$$

Wie groß muss die Masse des Betonfundaments mindestens sein, damit die Kippsicherheit 1,5 gewährleistet ist?

Antworten

1. Die maximale Masse des Stiels beträgt 103 g.
2. Der Abstand x ist 26,7 mm.
3. Der gesamte Körper bestehend aus Lineal, Hammer und Gummiband ist in der dargestellten Position im Gleichgewicht, weil sich der Schwerpunkt genau unterhalb der Tischkante befindet.
4. Das Betonfundament muss eine Masse von mindestens 6720 kg haben.

## 2 Bewegung und Kraft

### 2.1 Allgemeines über Bewegung

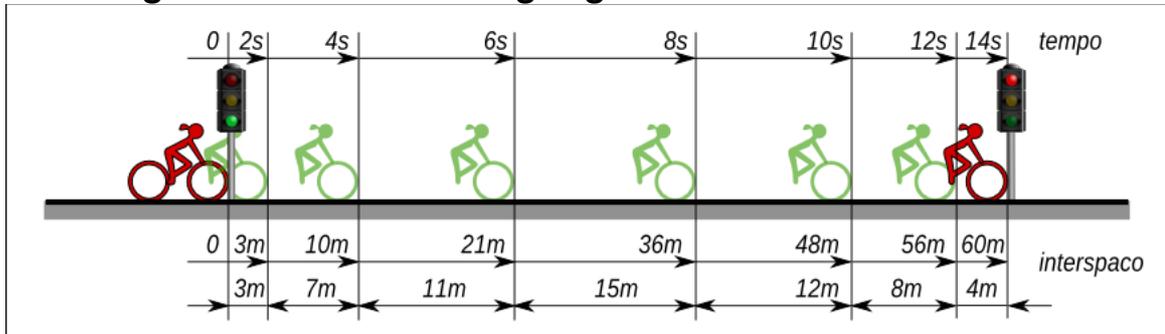


Fig. 49

#### 2.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

In Fig. 49 fährt die Radfahrerin los, wenn die Ampel auf grün schaltet und bleibt bei der zweiten roten Ampel stehen. In Intervallen von zwei Sekunden wird der zurückgelegte Weg gemessen. In Tab. 2 sind die Messwerte zusammengefasst und Fig. 50 zeigt das t-s Diagramm.

Mit den Werten von Tab. 2 kann man die Werte von Tab. 3 berechnen.

MP	t [s]	s [m]
1	2,0	3
2	4,0	10
3	6,0	21
4	8,0	36
5	10,0	48
6	12,0	56
7	14,0	60

Tab. 2

MP	$\Delta s$ [m]	v [m/s]
0 – 1	3,0	1,5
1 – 2	7,0	3,5
2 – 3	11,0	5,5
3 – 4	15,0	7,5
4 – 5	12,0	6,0
5 – 6	8,0	4,0
6 – 7	4,0	2,0

Tab. 3

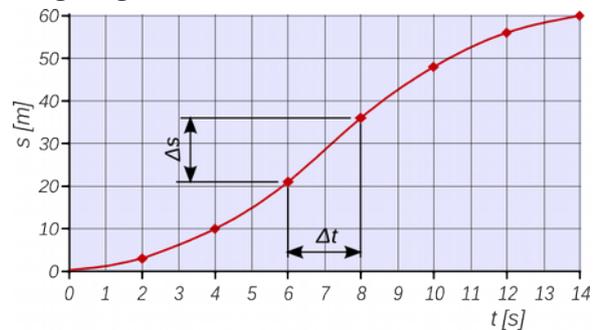


Fig. 50: Zeit-Weg Diagramm (t-s)

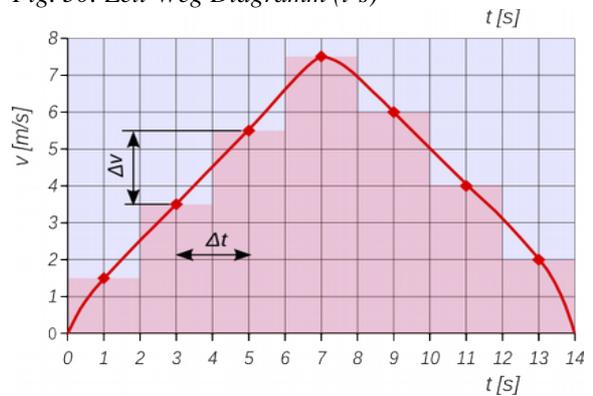


Fig. 51: Zeit-Geschwindigkeit Diagramm (t-v)

Um die mittlere Geschwindigkeit in jedem Intervall  $\Delta t = 2 \text{ s}$  zu berechnen verwendet man die Formel  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Es ergibt sich das t-v Diagramm von Fig. 51. Zu Beginn nimmt die Geschwindigkeit zu, die Radfahrerin beschleunigt. Dann nimmt die Geschwindigkeit ab.

Im physikalischen Sinn hat man immer dann eine **Beschleunigung** wenn sich der Vektor Geschwindigkeit ändert. Man berechnet sie mit der Formel:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (6)$$

wobei  $\Delta \vec{v}$  die Änderung der Geschwindigkeit im betrachteten Intervall ist  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_E - \vec{v}_A$

6 Hier werden die Formelzeichen  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  verwendet, um zu unterstreichen, dass die Geschwindigkeit und die Beschleunigung Vektoren sind. In den folgenden Seiten ist diese Tatsache meist nicht von Bedeutung und deshalb wird auf die Vektorkennzeichnung verzichtet. Im Kapitel zur Drehbewegung, wo die Vektoreigenschaften von Bedeutung sind, wird sie wieder verwendet.

## 2 Bewegung und Kraft

Die Maßeinheit der Beschleunigung ist  $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$

Bei der Radfahrerin von Fig. 49 erhöht sich die Geschwindigkeit in den ersten sieben Sekunden um  $7 m/s$  und in den letzten sieben Sekunden verringert sie sich um den selben Betrag.

Je größer die Beschleunigung ist, desto steiler ist die Kurve im t-v Diagramm.

Bei der Radfahrerin von Fig. 49 ist die Änderung der Geschwindigkeit in den letzten beiden Sekunden am größten und zwar  $\Delta v = v_E - v_A = 0 m/s - 2 m/s = -2 m/s$

Die Beschleunigung  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2 m/s}{1 s} = -2 \frac{m}{s^2}$  ist negativ, weil die Geschwindigkeit abnimmt. Die größte positive Beschleunigung hat sie in der ersten Sekunde mit einer Änderung der Geschwindigkeit von  $\Delta v = v_E - v_A = 1,5 m/s - 0 m/s = 1,5 m/s$  und einer Beschleunigung  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1,5 \frac{m}{s^2}$

### Beispiel 14 - Beschleunigung von Automobilen

In Autozeitschriften findet man die Zeiten welche Autos benötigen um eine bestimmte Geschwindigkeit zu erreichen. So findet man z.B. für die Autos Fiat 500L und VW Golf 2.0 TDI die Werte in der Tab. 4. Daraus ergibt sich das Diagramm von Fig. 52.



v [km/h]	Fiat 500L	VW Golf
	t [s]	t [s]
50	4,9	3,6
80	10,2	6,2
100	15,2	8,6
120	22,4	11,1
130	28,6	12,8

Tab. 4

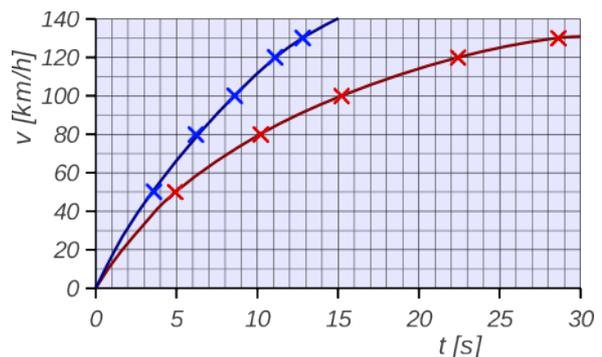


Fig. 52

Wie groß ist die Beschleunigung der beiden Fahrzeuge

- a) in den ersten beiden Sekunden    b) für die Beschleunigung zwischen  $120 km/h$  und  $130 km/h$

### Lösung

a) Aus dem Diagramm von Fig. 52 ergibt sich, dass die Fahrzeuge nach zwei Sekunden eine Geschwindigkeit von  $24 km/h$  bzw.  $34 km/h$  erreichen. Daraus errechnet man die Beschleunigungen:

$$\text{Fiat 500L } v_E = 24 \frac{km}{h} = 6,7 \frac{m}{s} \rightarrow \Delta v = 6,7 \frac{m}{s} - 0 = 6,7 \frac{m}{s} \quad a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6,7 m/s}{2 s} = 3,3 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{VW Golf } v_E = 34 \frac{km}{h} = 9,4 \frac{m}{s} \rightarrow \Delta v = 9,4 \frac{m}{s} - 0 = 9,4 \frac{m}{s} \quad a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9,4 m/s}{2 s} = 4,7 \frac{m}{s^2}$$

b) Die Änderung der Geschwindigkeit beträgt  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_E - \vec{v}_A = 10 km/h = 2,78 m/s$ . Die Zeiten erhält man aus Tab. 4

$$\text{Fiat 500L } \Delta t = 28,6 s - 22,4 s = 6,2 s \rightarrow a_{120} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2,78 m/s}{6,2 s} = 0,45 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{VW Golf } \Delta t = 12,8 s - 11,1 s = 1,7 s \rightarrow a_{120} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2,78 m/s}{1,7 s} = 1,6 \frac{m}{s^2}$$

### 2.1.2 Bewegung mit konstanter Beschleunigung

In den obigen t-v Diagrammen kann man feststellen, dass die Kurve im t-v Diagramm um so steiler ist, je größer die Beschleunigung ist. Wenn die Beschleunigung konstant ist, dann wird die Bewegung im t-v Diagramm als Gerade dargestellt.

#### Beispiel 15 - Losfahren mit konstanter Beschleunigung

Ein Fahrzeug startet mit einer konstanten Beschleunigung von  $1,5 \text{ m/s}^2$ .

- Berechne die Geschwindigkeit nach  $6 \text{ s}$ .
- Zeichne das t-v Diagramm für  $6 \text{ s}$ !
- Berechne die in  $6 \text{ s}$  zurückgelegten Weg!

Lösung  $a = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \Delta t = 6 \text{ s}$

a)  $\Delta v = a \cdot \Delta t = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ s} = 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow$

$$v_E = v_0 + \Delta v = 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

weil die Anfangsgeschwindigkeit Null ist

b) Es ergibt sich das t-v Diagramm von Fig. 53

c) Um den zurückgelegten Weg zu berechnen, kann man die Formel  $s = \bar{v} \cdot t$  verwenden, wobei  $\bar{v}$  die mittlere Geschwindigkeit in der Zeitspanne  $t$  ist. Nachdem die Beschleunigung konstant ist, wächst die Geschwindigkeit proportional zur Zeit.

Für die mittlere Geschwindigkeit gilt die Formel  $\bar{v} = \frac{v_0 + v_E}{2} = \frac{v_E}{2} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Damit wird:  $s = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 \text{ s} = 27 \text{ m}$

Man sieht, dass im t-v Diagramm der zurückgelegte Weg durch die Fläche unterhalb der Linie dargestellt wird, welche die Bewegung darstellt. Für Losfahren mit konstanter Beschleunigung ist die Fläche dreiecksförmig (graues Dreieck in Fig. 53).

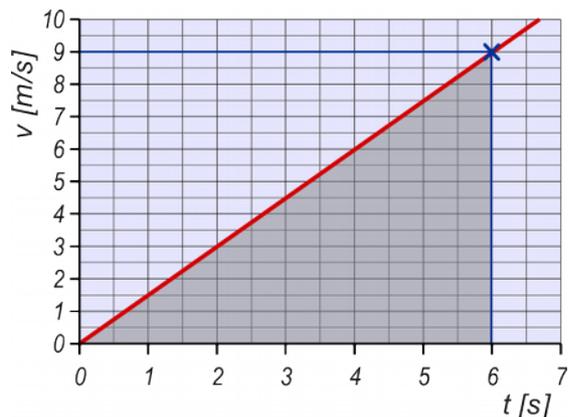


Fig. 53: t-v Diagramm bei konstanter Beschleunigung

Die Ergebnisse von Beispiel 15 sind allgemein gültig. Für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus der Ruhe gelten die folgende Formeln für die Endgeschwindigkeit, die mittlere Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg.

Endgeschwindigkeit  $v_E = a \cdot t$       mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v} = \frac{v_E}{2} = \frac{a \cdot t}{2}$

zurückgelegter Weg  $s = \bar{v} \cdot t = \frac{a \cdot t^2}{2}$

Die letzte Formel zeigt, dass die Darstellung dieser Bewegung im t-s Diagramm eine Parabel ist. Für die Bewegung von Beispiel 15 ist sie in Fig. 54 dargestellt.

Man sieht, dass wenn sich die Zeit verdoppelt, sich der Weg vervierfacht.

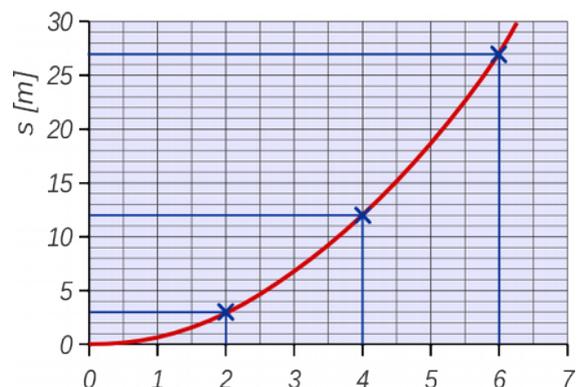


Fig. 54: t-s Diagramm bei konstanter Beschleunigung

## 2.2 Kraft und Beschleunigung

Im ersten Band wurde die Kraft als Ursache der Beschleunigung eingeführt. Aus dem einfachen Versuch von Fig. 55 erhält man qualitativ die folgenden Ergebnisse:

- Je größer die beschleunigende Kraft (d.h. die Gewichtskraft des Wägestücks) ist, desto größer ist die Beschleunigung.
- Je größer die Masse des zu beschleunigenden Körpers ist, desto kleiner ist die Beschleunigung.

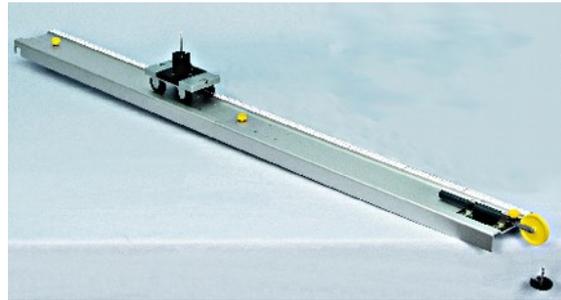


Fig. 55: Wägestück beschleunigt Messwagen

Mathematisch bedeutet das:  $a \sim \frac{F}{m} \rightarrow F \sim m \cdot a \rightarrow F = konst \cdot m \cdot a$

### 2.2.1 Gesetzliche Definition der Einheit 1 N – Grundgesetz der Mechanik

Im ersten Band wurde die Maßeinheit der Kraft auf der Basis ihrer verformenden Wirkung definiert. Die gesetzliche Definition beruht jedoch auf der beschleunigenden Wirkung der Kraft.

**Ein Newton ( 1 N ) ist die Kraft welche notwendig ist um einen Körper mit einem Kilogramm Masse mit 1 m/s<sup>2</sup> zu beschleunigen.**

Aus dieser Definition ergibt sich, dass die Konstante in obiger Formel gleich eins ist. Daraus folgt das sogenannte **Grundgesetz der Mechanik**

$$F = m \cdot a \rightarrow 1 N = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{m}{s^2}$$

#### Beispiel 16 - Flugzeug

Die Startmasse des Flugzeugs Airbus 330 darf maximal 238 Tonnen betragen. Ihre beiden Triebwerke haben eine Schubkraft von je 300 kN.

- Wie groß ist die Beschleunigung beim Start?
- Reicht eine Startbahn mit 1500 m Länge aus um die Mindestabfluggeschwindigkeit von 270 km/h zu erreichen?



Fig. 56: Flugzeug Airbus 330

#### Lösung

$$m = 238000 \text{ kg} \quad F = 2 \cdot 300 \text{ kN} = 600 \text{ kN} \quad s = 1500 \text{ m}$$

$$\text{a) } a = \frac{F}{m} = \frac{600 \cdot 10^3 \text{ N}}{238 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 2,52 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{b) } s = \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1500 \text{ m}}{2,52 \text{ m/s}^2}} = 34,5 \text{ s} \rightarrow v = a \cdot t = 87 \frac{m}{s} = 313 \frac{km}{h}$$

**Antwort:** Die Beschleunigung beim Start beträgt 2,52 m/s<sup>2</sup>. Wenn alles perfekt abläuft, dann erreicht das Flugzeug die erforderliche Geschwindigkeit aber der Sicherheitsspielraum ist gering. Deshalb starten Großflugzeuge wie der "Airbus 330" nur von Startbahnen mit mindestens 3000 m Länge.

## 2 Bewegung und Kraft

### 2.2.2 Freier Fall

Der freie Fall ist die Bewegung, welche entsteht, wenn auf einen Körper nur die Gewichtskraft  $F_G$  wirkt. Wenn die Fallhöhe nicht all zu groß ist, dann kann diese Kraft als konstant betrachtet werden und es entsteht eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung (gleichförmig beschleunigte Bewegung). Die Beschleunigung ist

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_G}{m} = \frac{m \cdot g}{m} = g$$

Der Betrag der Beschleunigung frei fallender Körper ist gleich dem Ortsfaktor  $g$  (siehe Band 1 Par. 2.2.2). Auf der Erde beträgt sein mittlerer Wert  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Für frei fallende Körper gelten somit folgende Formeln:

Endgeschwindigkeit nach der Zeit  $t$ :  $v_E = g \cdot t$     Fallhöhe nach der Zeit  $t$ :  $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$

#### Beispiel 17 - Freier Fall 1

Die Fig. 57 zeigt einen frei fallenden Ball. Der Zeitintervall zwischen zwei dargestellten Positionen beträgt jeweils 0,05 s.

- Wie groß sind die Fallhöhe nach 0,5 s und die dabei erreichte Geschwindigkeit?
- Nach welcher Zeit ist die Fallhöhe gleich 0,5 m, und wie groß ist dann die Endgeschwindigkeit?

#### Lösung

a)  $h = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,5 \text{ s})^2}{2} = 1,2 \text{ m}$      $v = g \cdot t = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b)  $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 0,32 \text{ s}$      $\rightarrow$      $v = g \cdot t = 3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Antwort: a) Nach 0,5 Sekunden freiem Fall beträgt die Fallhöhe 1,2 m und die Geschwindigkeit 4,9 m/s.

b) Die Strecke von 0,5 m wird in s zurückgelegt und die dabei erreichte Geschwindigkeit beträgt 3,1 m/s.

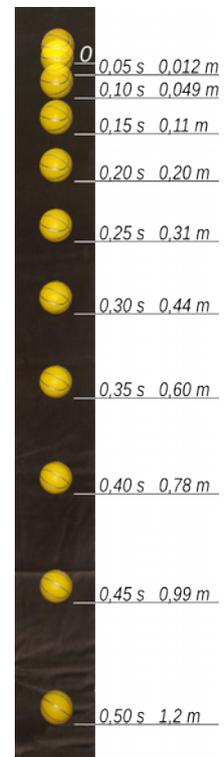


Fig. 57

Die letzten Formeln von Beispiel 17 eignen sich um die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach einer bestimmten Fallhöhe  $h$  zu berechnen.

Die Zeit beträgt  $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$  und die Geschwindigkeit  $v = g \cdot t = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

#### Beispiel 18 - Freier Fall 2

Welche Geschwindigkeit erreicht ein im Gravitationsfeld der Erde frei fallender Körper nach einer Fallhöhe von 1000 m?

Lösung  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1000 \text{ m}} = 140 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 504 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

### 2.2.3 Fallen in der Luft – Fallschirmspringen

Beispiel 18 zeigt, dass ein in Erdnähe frei fallender Körper nach 1000 m eine Geschwindigkeit von 504 km/h erreicht. Aber innerhalb der Erdatmosphäre gibt es keinen freien Fall.

Während des Fallens in der Luft nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit auch der Luftwiderstand zu. Deshalb verringert sich die beschleunigende Kraft und somit auch die Beschleunigung. Ab einer bestimmten Geschwindigkeit sind die Gewichtskraft und der Luftwiderstand gleich groß, dann ist die Beschleunigung Null und die Geschwindigkeit hat ihren Maximalwert erreicht.

Ein Fallschirmspringer in der üblichen Fallposition (siehe Fig. 58) erreicht nach etwa 10 Sekunden die maximale Geschwindigkeit von 200 km/h (55 m/s). Wenn der Fallschirm sich öffnet, dann erfolgt eine Verzögerung von 50 m/s<sup>2</sup>. Das bedeutet, dass nach etwa einer Sekunde die Sinkgeschwindigkeit von 4 m/s erreicht ist, mit welcher der Fallschirmspringer zu Boden schwebt.



Fig. 58: Fallschirmspringer

#### Beispiel 19 - Fallschirmspringen 1

Fig. 59 zeigt das t-v Diagramm für einen Fallschirmspringer, der den Fallschirm 15 s nach dem Absprung öffnet (etwas spät in diesem Fall!!) und nach insgesamt 30 s landet.

Aus welcher Höhe ist er abgesprungen?

#### Lösung

Es wurde bereits gesagt, dass die Fläche unterhalb der Kurve im t-v Diagramm ein Maß für den zurückgelegten Weg darstellt.

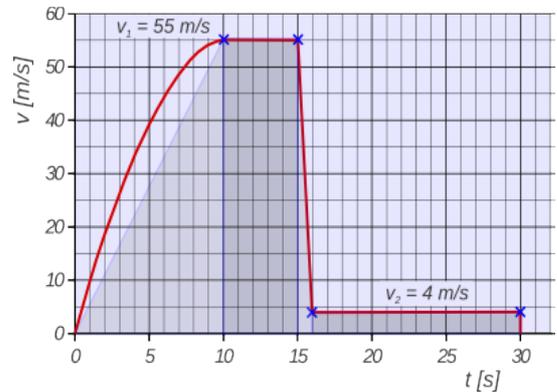


Fig. 59

Die gesamte Fläche besteht aus den vier grau gefärbten und leicht zu berechnenden Teilen sowie aus der kleinen Fläche zwischen der Kurve und dem ersten Dreieck. Letztere kann nur annähernd berechnet werden.

a) Fallstrecke während der Beschleunigung (0s -10s)

Während der ersten 10 Sekunden erhöht sich die Geschwindigkeit von 0 m/s auf 55 m/s. Die mittlere Beschleunigung beträgt 5,5 m/s<sup>2</sup>. Die Beschleunigung verringert sich von anfänglich 9,8 m/s<sup>2</sup> auf Null. Nach 5 Sekunden ist die effektive Geschwindigkeit um 10 m/s größer als diejenige welche mit konstanter Beschleunigung erreicht würde. Deshalb kann man die mittlere Geschwindigkeit in der Beschleunigungsphase folgendermaßen berechnen.

$$\bar{v}_a = \frac{v_1}{2} + \frac{10 \text{ m/s}}{2} = 32,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad h_a = \bar{v}_a \cdot t_a = 32,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 325 \text{ m}$$

b) Fallhöhe mit der Endgeschwindigkeit  $\bar{v}_b = v_1 = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad h_b = \bar{v}_b \cdot t_b = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 275 \text{ m}$

c) Fallhöhe während sich der Schirm öffnet (15s – 16s)

$$\bar{v}_c = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{55 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}}{2} = 29,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad h_c = \bar{v}_c \cdot t_c = 29,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} = 29,5 \text{ m}$$

d) Fallhöhe am offenen Fallschirm (16s – 30s)

$$\bar{v}_d = v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad h_d = \bar{v}_d \cdot t_d = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 14 \text{ s} = 56 \text{ m}$$

Absprunghöhe (gesamte Fallhöhe)  $h = h_a + h_b + h_c + h_d = 325 \text{ m} + 275 \text{ m} + 29,5 \text{ m} + 56 \text{ m} = 686 \text{ m}$

2.2.4 Beschleunigung auf der schiefen Ebene

Versuch 4 - Beschleunigung auf der schiefen Ebene

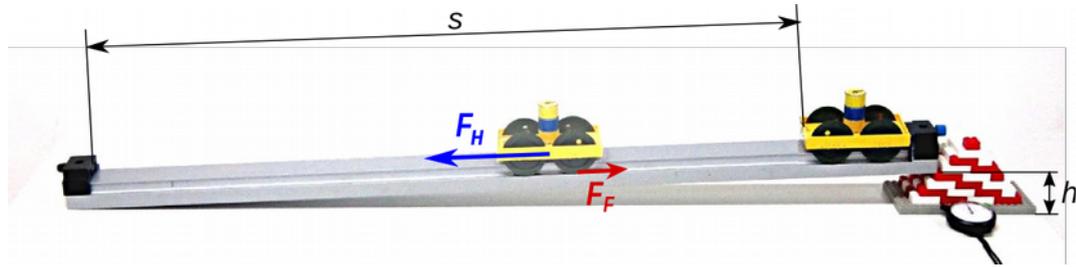


Fig. 60: Beschleunigung entlang der schiefen Ebene

Das Bild 60 zeigt einen einfachen Versuch. Ein Versuchswagen mit einer Masse von 207 g <sup>(7)</sup> beschleunigt entlang der schiefen Ebene. Die Länge beträgt  $s = 82,5 \text{ cm}$ . Für verschiedene Höhenunterschiede  $h$  wird die Zeit gemessen, die nötig ist, um die Strecke  $s$  zurückzulegen. Aus den Messwerten lassen sich die Kraft, die den Wagen hangabwärts zieht und die Beschleunigung  $a$  berechnen. Es gilt:

$$F_H = \frac{m \cdot g \cdot h}{s} \quad a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

Die Ergebnisse zeigt folgende Tabelle.

	h [mm]	t [s]	$F_T$ [mN]	a [m/s <sup>2</sup> ]
1	9,6	7,7	24	0,03
2	19,2	3,6	47	0,13
3	28,8	2,7	71	0,23
4	38,4	2,2	95	0,34
5	48,0	1,9	118	0,46
6	57,6	1,7	142	0,57

Tab. 5

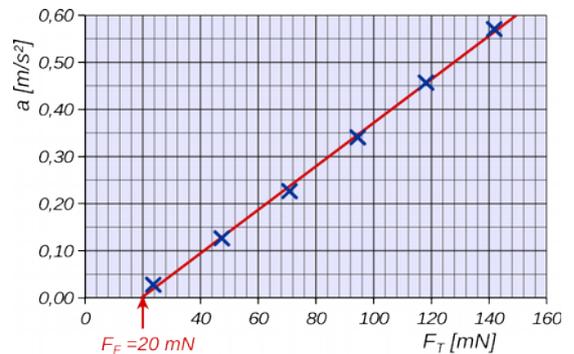


Fig. 61

Aus den Werten von Tab. 5 ergibt sich das Diagramm von Fig. 61. Man sieht, dass die Punkte gut durch eine Gerade angenähert werden. Die Gerade geht jedoch nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems, weil die Bewegung nicht reibungsfrei ist. Wenn die Hangabtriebskraft nicht größer ist als die Reibungskraft, dann beschleunigt der Körper nicht.

Die beschleunigende Kraft ist  $F = F_H - F_R$  und folglich  $a = \frac{F_H - F_R}{m} = \frac{g \cdot h}{s} - \frac{F_R}{m}$ .

Aus dem Diagramm von Fig. 61 ergibt sich, dass die Reibungskraft ungefähr gleich  $F_R = 20 \text{ mN}$  ist. Wenn man diesen Wert z.B. für einen Höhenunterschied  $h = 48 \text{ mm}$  einsetzt, erhält man

$$a = \frac{g \cdot h}{s} - \frac{F_R}{m} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,048 \text{ m}}{0,825 \text{ m}} - \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{207 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Der Wert liegt nahe beim Ergebnis des Experiments.

Die Berechnungen von Versuch 4 gelten allgemein. Wenn man die Reibungskraft berücksichtigt, dann ist die Beschleunigung auf der schiefen Ebene  $a = \frac{F_H - F_R}{m} = \frac{g \cdot h}{s} - \frac{F_R}{m}$

Wenn die Reibung Null ist, dann gilt  $a = \frac{g \cdot h}{s}$ . Folglich ist die höchste erreichbare Geschwindigkeit auf der schiefen Ebene mit Höhenunterschied  $h$

$$v = a \cdot t = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{2 \cdot s \cdot a} = \sqrt{2 \cdot s \cdot \frac{g \cdot h}{s}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{gleich groß wie beim freien Fall aus } h!$$

<sup>7</sup> Es ist wichtig, dass der Messwagen eine relativ große Masse hat und dass die Räder vergleichsweise leicht sind. Andernfalls wird das Ergebnis durch die Bewegungsenergie der Räder beeinflusst.

### 2.3 Bewegungsenergie

Im Kap. 5 des ersten Bandes wurde bereits gesagt, dass die Bewegungsenergie (kinetische Energie) eines Körpers mit seiner Geschwindigkeit zunimmt. Nun sind die Voraussetzungen gegeben, um diese Energie genau zu berechnen. Fig. 62 zeigt die Energieumwandlungskette eines frei fallenden Balles. Ohne Reibung wird die gesamte Höhenenergie für Beschleunigungsarbeit genutzt.

$$\Delta E_H = W_a = F_G \cdot h = \Delta E_B$$

Da die Bewegungsenergie zu Beginn Null ist, ist die Bewegungsenergie am Ende der Fallbewegung gleich  $E_B = F_G \cdot h$

Im Allgemeinen gilt für den frei fallenden Körper:

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad v = g \cdot t$$

$$E_B = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot g \cdot t \frac{2}{2} = m \cdot g^2 \cdot t \frac{2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \text{Dieses Ergebnis gilt allgemein.}$$

Wenn ein Körper mit Masse  $m$  eine Geschwindigkeit  $v$  hat, dann ist seine **Bewegungsenergie** oder **kinetische Energie** gleich

$$E_B = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Das gleiche Ergebnis kann man auch auf andere Art erhalten. Um die Bewegungsenergie zu vergrößern, muss Beschleunigungsarbeit durch eine Kraft  $F$  entlang des Weges  $s$  verrichtet werden. Wir haben bereits gesehen dass

$$F = m \cdot a \quad v = a \cdot t \quad s = \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \rightarrow \quad E_B = F \cdot s = \frac{m \cdot a \cdot a \cdot t^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Das Ergebnis stimmt überein.

#### 2.3.1 Beispiele

##### Beispiel 20 Beschleunigung eines Flugzeugs

Ein kleines Flugzeug hat eine Masse von 1400 kg. Beim Start entwickelt der Motor eine Kraft von 3000 N.

Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 250 Metern wenn die Reibung vernachlässigt wird



Fig. 63 Beschleunigung eines Flugzeugs

**Lösung**  $m = 1400 \text{ kg} \quad s = 250 \text{ m} \quad F = 3000 \text{ N}$

$$W_a = F \cdot s = 3000 \text{ N} \cdot 250 \text{ m} = 750 \text{ kJ}$$

$$E_B = W_a = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_a}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 750000 \text{ J}}{1400 \text{ kg}}} = 32,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 118 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Für ein kleines Flugzeug reicht das, um abzuheben.

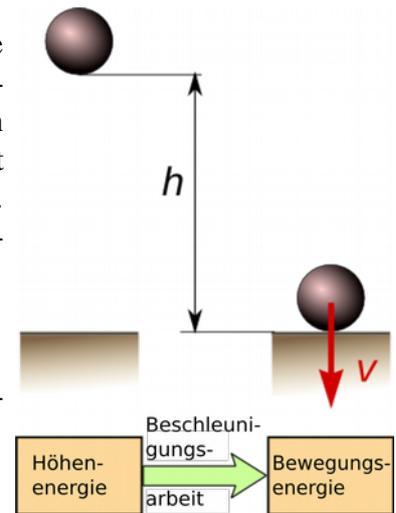


Fig. 62: Energieumwandlung des frei fallenden Körpers

## 2 Bewegung und Kraft

### Beispiel 21 Beschleunigung auf schiefer Ebene mit Reibung

Ein Versuchswagen mit einer Masse von 207 g beschleunigt auf einer 82,5 cm langen schiefen Ebene mit einem Höhenunterschied von 4,8 cm (siehe Fig. 60 auf S. 22). Die Reibungskraft beträgt 20 mN.

- Wie groß ist die Endgeschwindigkeit ?
- Wie lange dauert die Bewegung?

Lösung  $m = 207 \text{ g}$   $s = 0,825 \text{ m}$   $h = 4,8 \text{ cm}$   $F_R = 20 \text{ mN}$

a) Die Aufgabe kann man so lösen wie in Versuch 4, indem zuerst die beschleunigende Kraft berechnet wird. Daraus können dann Beschleunigung und Endgeschwindigkeit errechnet werden.

Aber in diesem Fall kommt man mit dem Energieerhaltungssatz schneller zum Ergebnis. Fig. 64 zeigt die Energieumwandlungskette des Vorgangs. Die gesamte anfänglich Höhenenergie wird für Beschleunigungsarbeit und Reibungsarbeit genutzt und schließlich in innere Energie umgewandelt. <sup>(8)</sup>

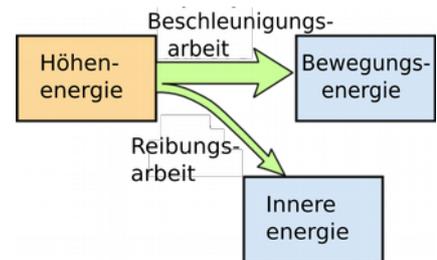


Fig. 64

$E_H = E_B + W_R$  Die Höhenenergie ist  $E_H = m \cdot g \cdot h$  und die Reibungsarbeit  $W_R = F_R \cdot s$

$$E_B = E_H - W_R = m \cdot g \cdot h - F_R \cdot s = 207 \text{ g} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,048 \text{ m} - 20 \text{ mN} \cdot 0,825 \text{ m} = 81 \text{ mJ}$$

$$E_B = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ mJ}}{207 \text{ g}}} = 0,88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)  $t = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot 0,825 \text{ m}}{0,88 \text{ m/s}} = 1,9 \text{ s}$  gleich wie das Ergebnis von Punkt 5 in Tab. 5.

### Beispiel 22 Schlittenfahren

Ein Schlittenfahrer, dessen Masse samt Schlitten 80 kg beträgt, startet auf einem Hang mit konstanter Neigung von  $22^\circ$  und beschleunigt gleichförmig. Nach einer Strecke von 25 m beträgt die Geschwindigkeit 36 km/h.

Wie groß ist die mittlere Reibungskraft während der Fahrt ?

Lösung  $m = 80 \text{ kg}$   $s = 25 \text{ m}$   $\alpha = 22^\circ$   $v = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

Die Hangabtriebskraft ist <sup>(9)</sup>

$$F_H = F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \sin 22^\circ = 294 \text{ N}$$

Und die beschleunigende Kraft  $F_a = F_H - F_R$

Die Energieumwandlungskette ist die von Fig. 64, und die Beschleunigungsarbeit ist gleich der Bewegungsenergie.

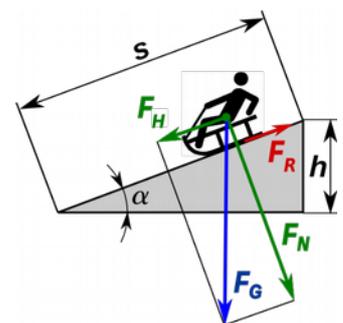


Fig. 65

$$W_a = F_a \cdot s = E_B = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{80 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})^2}{2} = 4000 \text{ J} \quad \rightarrow \quad F_a = \frac{W_a}{s} = \frac{4000 \text{ J}}{25 \text{ m}} = 160 \text{ N}$$

Die mittlere Reibungskraft ist somit  $F_R = F_H - F_a = 294 \text{ N} - 160 \text{ N} = 134 \text{ N}$

8 Genau genommen setzt sich die Bewegungsenergie aus der Translationsenergie des Wagens und der Rotationsenergie der Räder zusammen. Wegen der kleinen Masse der Räder wird letztere vernachlässigt.

9 Wenn die trigonometrischen Funktionen noch nicht bekannt sind, dann kann man  $F_z$  auch durch die Zerlegung von  $F_G$  berechnen.

## 2 Bewegung und Kraft

### Beispiel 23 Bremsen eines Rennwagens

Ein Rennauto mit einer Masse von  $620 \text{ kg}$  wird von der Geschwindigkeit von  $320 \text{ km/h}$  auf  $90 \text{ km/h}$  abgebremst.

Um wie viel erhöht sich die Temperatur der vier Bremscheiben aus Karbon-Fasern mit je  $1,5 \text{ kg}$  Masse, wenn man annimmt, dass  $80\%$  der Verringerung der Bewegungsenergie auf die Bremscheiben übergeht. Die spezifische Wärmekapazität der Karbon-Fasern beträgt  $710 \text{ J/(kgK)}$



Fig. 66: Rennwagen mit glühenden Bremscheiben

**Lösung**  $m_A = 620 \text{ kg}$      $v_1 = 320 \text{ km/h} = 88,9 \text{ m/s}$      $v_2 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$

$$m_s = 4 \cdot 1,5 \text{ kg} = 6 \text{ kg} \quad c = 710 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

Wenn das Fahrzeug auf horizontaler Strecke gebremst wird, dann ergibt sich die Energieumformung von Fig. 67. Die Änderung der Bewegungsenergie wird zum Großteil für die Erhöhung der **inneren Energie** der Bremscheiben „genutzt“.

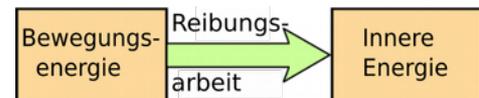


Fig. 67: Energieumwandlung beim Bremsen

$$E_{B1} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} \quad E_{B2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2}$$

$$\Delta E_B = \frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{620 \text{ kg}}{2} \cdot \left( (88,9 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (25 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \right) = 2260 \text{ kJ}$$

$$0,8 \cdot \Delta E_B = \Delta E_i = W_Q = c \cdot m_D \cdot \Delta T \quad \Delta T = \frac{0,8 \cdot \Delta E_B}{c \cdot m_s} = \frac{0,8 \cdot 2260 \text{ kJ}}{0,71 \text{ kJ/kgK} \cdot 6 \text{ kg}} = 424 \text{ K}$$

**Antwort**

Die Temperatur der Scheiben erhöht sich um  $424 \text{ K}$ . Dieser Wert ist nicht außergewöhnlich. Bremscheiben aus Karbon-Fasern arbeiten gut zwischen  $400 \text{ °C}$  und  $700 \text{ °C}$ .

### Beispiel 24 Bremsen eines Motorrads

Der Motorradfahrer bremst auf einer horizontalen Straße, wo der Reibungskoeffizient zwischen Reifen und Asphalt  $\mu = 0,4$  beträgt.

Wie groß ist die minimale Bremsstrecke, wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $36 \text{ km/h}$  bzw.  $72 \text{ km/h}$  beträgt?

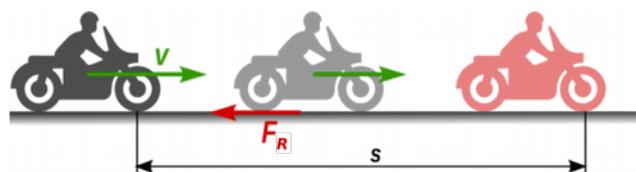


Fig. 68: Motorradfahrer bremst

**Lösung**  $m = 620 \text{ kg}$      $v_1 = 320 \text{ km/h} = 88,9 \text{ m/s}$      $v_2 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$

Die maximale Bremskraft ist gleich der Reibungskraft.  $F_R = \mu \cdot F_G = \mu \cdot m \cdot g$

Die Bremsarbeit ist gleich der anfänglichen Bewegungsenergie.

$$F_R \cdot s = E_B \quad \rightarrow \quad \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Die minimale Bremsstrecke ist  $s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$     Für die Geschwindigkeiten des Beispiels:

$$v = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad s = 12,7 \text{ m} \quad v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad s = 51 \text{ m}$$

Man sieht, dass wenn sich die Geschwindigkeit verdoppelt, die Bremsstrecke sich vervierfacht!

## 2.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Die Bewegung auf der Kreisbahn kann gleichförmig oder ungleichförmig sein. Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung**, welche hier besprochen wird, ist der **Betrag** der Geschwindigkeit konstant, nur ihre **Richtung** ändert sich.

Für die Kreisbewegung sind folgende Größen definiert :

- $r \Rightarrow$  **Radius** des Kreises auf dem sich der Körper bewegt
- $\vec{v} \Rightarrow$  **Geschwindigkeit** entlang der Kreisbahn
- $T \Rightarrow$  **Periode** = Zeit für einen vollständigen Kreis
- $f \Rightarrow$  **Frequenz** der Kreisbewegung

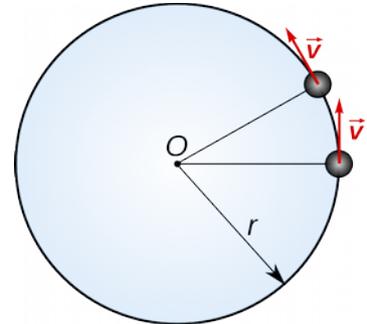


Fig. 69

Die Frequenz ist gleich dem Kehrwert der Periode  $f = \frac{1}{T}$

Die Grundeinheit der Frequenz ist  $[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$  (Hertz)

Benannt nach dem Physiker Heinrich Rudolf **Hertz**.<sup>(10)</sup>

Der während einer Umdrehung zurückgelegte Weg ist gleich dem Umfang des Kreises

$$s = 2 \cdot r \cdot \pi \quad \rightarrow \quad \text{Betrag der Geschwindigkeit} \quad v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f = d \cdot \pi \cdot f$$

wobei  $d = 2 \cdot r$  der Durchmesser des Kreises ist.

### Beispiel 25 Drehen

Das Werkstück mit 45 mm Durchmesser dreht mit 240 Umdrehungen pro Minute.

- a) Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit?
- b) Wie groß muss die Drehzahl in  $U/min$  sein damit die Schnittgeschwindigkeit 220  $m/min$  beträgt?<sup>(11)</sup>

### Lösung

$$d = 45 \text{ mm} = 0,045 \text{ m}$$

$$\text{a) } f = 240 \frac{1}{\text{min}} = 4 \frac{1}{s}$$

$$v = d \cdot \pi \cdot f = 0,045 \text{ m} \cdot \pi \cdot 240 \frac{1}{\text{min}} = 33,9 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$\text{b) } v = 220 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$v = d \cdot \pi \cdot f \quad \rightarrow \quad f = \frac{v}{d \cdot \pi} = \frac{220 \frac{\text{m}}{\text{min}}}{0,045 \text{ m} \cdot \pi} = 1556 \frac{1}{\text{min}} = 25,9 \frac{1}{s} = 25,9 \text{ Hz}$$

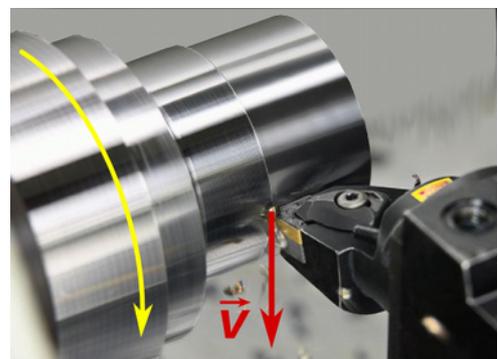


Fig. 70: Tornado

<sup>10</sup> Heinrich Rudolf **Hertz** (1857-1894) war ein deutscher Physiker. Seine bedeutendste Arbeit war der experimentelle Nachweis der elektromagnetischen Theorie. Er konnte zeigen, dass sich elektromagnetische Wellen mit derselben Geschwindigkeit ausbreiten wie das Licht. Seine Arbeiten lieferten die Grundlagen für die Entwicklung der drahtlosen Telefonie und Telegraphie.

<sup>11</sup> In der Technik wird die Drehfrequenz häufig in der Maßeinheit Umdrehungen pro Minute angegeben, ebenso wie die Schnittgeschwindigkeit von Werkzeugen meist in Meter pro Minute angegeben wird.

## 2.5 Zentralkraft

Wenn eine Körper sich auf einer Kreisbahn bewegt, dann ändert sich seine Bewegungsrichtung dauernd. Folglich ändert sich auch bei gleichförmiger Bewegung der Vektor Geschwindigkeit.

Änderung des Vektors Geschwindigkeit bedeutet Beschleunigung und Beschleunigung erfordert Kraft. Wegen der Trägheit versucht jeder Körper den **Betrag** und die **Richtung** seiner Geschwindigkeit beizubehalten. Bei der Kreisbewegung ist eine Kraft erforderlich, die verhindert, dass der Körper die Kreisbahn verlässt.

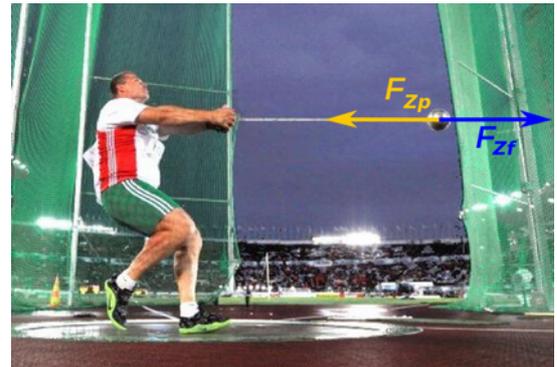


Fig. 71: Hammerwerfer beim Wettkampf

Wenn der Athlet von Fig. 71 den Hammer auslässt, dann setzt dieser seine Bewegung in der Richtung fort, in welche er sich im Moment des Auslassens bewegt hat. Aus der Sicht eines außenstehenden Beobachters zieht der Athlet den Hammer dauernd zum Mittelpunkt des Kreises um die Richtungsänderung der Geschwindigkeit zu bewirken. Diese zum Kreismittelpunkt wirkende Kraft nennt man **Zentripetalkraft**  $F_{zp}$ .

Aus dem Blickpunkt des Athleten und eines eventuell mitkreisenden Beobachters wirkt auch eine andere Kraft, welche die Zentripetalkraft im Gleichgewicht hält und verhindert, dass sich der Hammer zum Zentrum hin bewegt. Man nennt sie **Zentrifugalkraft**  $F_{zf}$  und sie hat denselben Betrag wie die Zentripetalkraft. In diesem Buch wird für die beiden Kräfte der einheitlich der Begriff **Zentralkraft** verwendet. Diese Kraft wirkt vom Rotationszentrum  $O$  aus radial auf den Körper, wobei die Richtung vom Bezugssystem abhängt.

### 2.5.1 Berechnung der Zentralkraft

Während einer Kreisbewegung ändert sich dauernd der Vektor Geschwindigkeit. Wenn ein Körper sich im Zeitabschnitt  $\Delta t$  von der Position 1 zur Position 2 bewegt (siehe Fig. 72), dann ist seine Beschleunigung

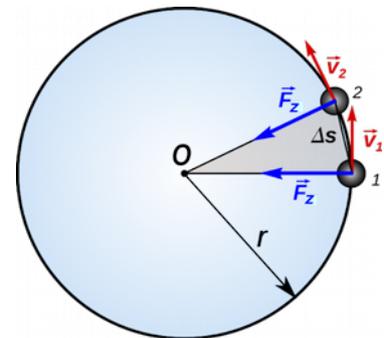


Fig. 72

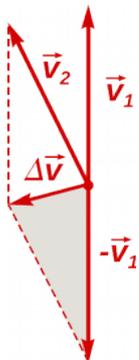


Fig. 73

$$\vec{a}_z = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, muss man die Differenz der Vektoren bilden (siehe Fig. 73).

Wenn  $\Delta t$  sehr klein ist, dann ist der graue Kreissektor von Fig. 72 nahezu ein Dreieck, welches seinerseits ähnlich dem grauen Dreieck in Fig. 73 ist.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} = \frac{v \cdot \Delta t}{r} \quad \hat{\text{car}} \quad \Delta s = v \cdot \Delta t$$

Für die sogenannte **Zentralbeschleunigung** folgt  $\vec{a}_z = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$

Aus der Grundgleichung der Mechanik erhält man für die Zentralkraft

$$F_z = a_z \cdot m = m \cdot v \frac{v^2}{r} \quad [F_z] = \text{kg} \cdot \text{m} \frac{\text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

### 2.5.2 Beispiele

#### Beispiel 26

Ein Eimer mit Wasser wird in einem vertikalen Kreis mit einem Radius von  $65\text{ cm}$  geschwungen (siehe Fig. 74).

Wie groß muss die Drehfrequenz sein, damit im höchsten Punkt kein Wasser ausläuft?

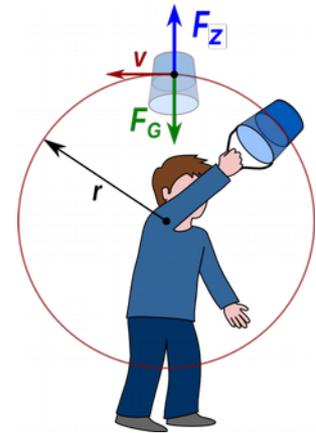


Fig. 74

#### Lösung

Im höchsten Punkt fällt das Wasser nicht heraus, wenn die Zentralkraft (Fliehkraft) wenigstens so groß ist, wie die Gewichtskraft.

$$\text{Fliehkraft } F_Z = m \cdot v \frac{2}{r} \quad \text{Gewichtskraft } F_G = m \cdot g$$

$$\text{Gleichgewicht } F_Z = F_G \rightarrow m \cdot v \frac{2}{r} = m \cdot g \rightarrow v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,65 \text{ m}} = 2,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Die erforderliche Drehfrequenz ist } f = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{2,53 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,65 \text{ m} \cdot \pi} = 0,62 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Die maximale Zeit für eine Umdrehung ist } T = 1/f = 1,62 \text{ s} .$$

#### Beispiel 27

Die Lochscheibe wird von einem Motor um die vertikale Achse gedreht. In einem Loch welches  $13,5\text{ cm}$  vom Drehpunkt  $O$  entfernt ist und einen Durchmesser von  $6\text{ mm}$  hat, liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von  $15\text{ mm}$  (siehe Fig. 75).

Die Drehfrequenz wird langsam erhöht. Wie groß ist sie, wenn die Kugel von der Scheibe rollt?

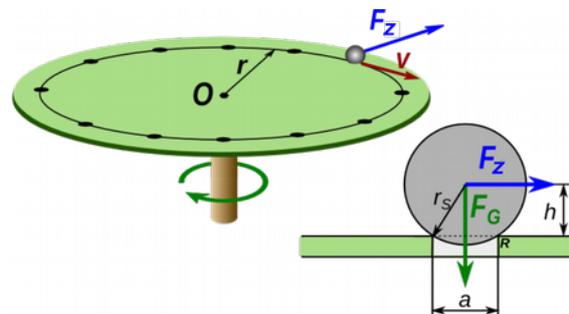


Fig. 75

#### Lösung

$$r = 13,5 \text{ cm} \quad a = 6 \text{ mm} \quad r_s = 7,5 \text{ mm}$$

Die Kugel rollt von der Scheibe, wenn, bezogen auf den Kippunkt  $K$  das Kippmoment, welches die Fliehkraft erzeugt, größer ist als das Standmoment der Gewichtskraft.

Gleichgewicht

$$F_Z \cdot h = \frac{F_G \cdot a}{2} \rightarrow m \cdot v \frac{2 \cdot h}{r} = \frac{m \cdot g \cdot a}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot a \cdot r}{2 \cdot h}}$$

$$\text{pythagoräischer Lehrsatz } h = \sqrt{r_s^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{(7,5 \text{ mm})^2 - (3 \text{ mm})^2} = 6,87 \text{ mm}$$

$$\text{folglich } v = \sqrt{\frac{g \cdot a \cdot r}{2 \cdot h}} = \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ mm} \cdot 0,135 \text{ m}}{2 \cdot 6,87 \text{ mm}}} = 0,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Die Drehfrequenz beträgt } f = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{0,76 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,135 \text{ m} \cdot \pi} = 0,897 \frac{1}{\text{s}} = 53,8 \frac{1}{\text{min}}$$

## 2 Bewegung und Kraft

### Beispiel 28

Auf einer waagrecht rotierenden Scheibe liegt ein Holzklotz in einem Abstand  $r$  von der Rotationsachse (siehe Fig. 76).

Wird der Klotz von der Scheibe rutschen oder kippen, wenn sich die Drehfrequenz dauernd erhöht?

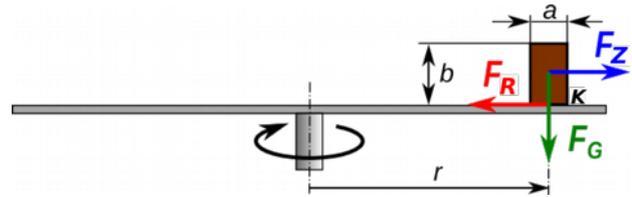


Fig. 76

### Lösung

Die Reibungskraft zwischen Scheibe und Klotz wirkt als Zentripetalkraft. Wenn die Zentrifugalkraft gleich der Reibungskraft wird, dann rutscht der Klotz von der Scheibe.

$$\text{Zentrifugalkraft } F_Z = m \cdot v \frac{2}{r} \quad \text{Reibungskraft } F_R = m \cdot g \cdot \mu$$

$$\text{Gleichgewicht } F_Z = F_R \rightarrow m \cdot v \frac{2}{r} = m \cdot g \cdot \mu \rightarrow v = \sqrt{g \cdot \mu \cdot r}$$

Wenn  $v > \sqrt{g \cdot \mu \cdot r}$  rutscht der Klotz von der Scheibe.

Wenn die Reibungskraft ausreicht um das Rutschen zu vermeiden, dann kann die Drehfrequenz noch größer werden, bis das Kippmoment der Fliehkraft das Standmoment der Gewichtskraft überwindet.

$$\text{Gleichgewicht } F_Z \cdot \frac{b}{2} = F_G \cdot \frac{a}{2} \rightarrow m \cdot v \frac{2}{r} \cdot \frac{b}{2} = m \cdot g \cdot \frac{a}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot a \cdot r}{b}}$$

Wenn  $v > \sqrt{\frac{g \cdot a \cdot r}{b}}$  dann kippt der Klotz weg.

Im Allgemeinen folgt aus den Formeln, dass wenn  $\mu > \frac{a}{b}$  der Klotz kippt, andernfalls rutscht er.

### Beispiel 29

Ein Lastwagen fährt mit  $60 \text{ km/h}$  in eine ebene Kurve mit  $40 \text{ m}$  Radius. Die Reibungszahl zwischen dem nassen Asphalt und den Reifen beträgt  $0,6$  (siehe Fig. 77).

Wird der Wagen die Kurve problemlos durchfahren, wenn der Radabstand  $a = 1,8 \text{ m}$  beträgt?

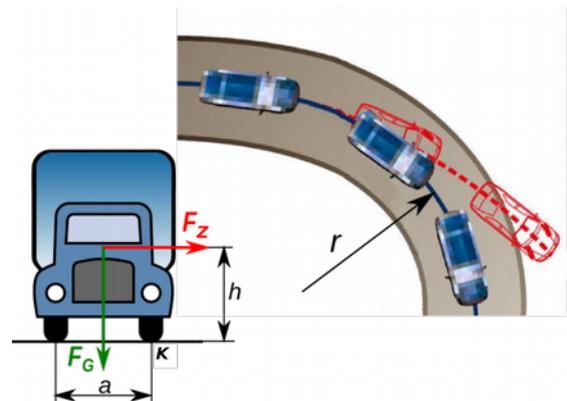


Fig. 77

### Lösung

Die Aufgabe ist praktisch gleich der in Beispiel 28. Man muss nur den Hebelarm der Fliehkraft anpassen, der nun gleich  $h$  ist.

$$\text{Der Wagen rutscht wenn } v < \sqrt{g \cdot \mu \cdot r} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6 \cdot 40 \text{ m}} = 17,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\text{Er kippt nicht wenn } v < \sqrt{\frac{g \cdot a \cdot r}{2 \cdot h}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ m} \cdot 40 \text{ m}}{2 \cdot 1,4 \text{ m}}} = 15,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Unter den Bedingungen des Beispiels würde der Wagen also von der Straße kippen.

## 2.6 Aufgaben

- Ein Auto mit einer Masse von  $1450\text{ kg}$  beschleunigt von  $0$  auf  $50\text{ km/h}$  in  $3,6\text{ s}$ .  
Wie groß muss die Leistung für diese Beschleunigung sein?
- Motorrad und Fahrer haben zusammen eine Masse von  $280\text{ kg}$  und fahren mit  $80\text{ km/h}$ . Der Durchmesser der Räder beträgt  $60\text{ cm}$ .
  - Wie groß ist die Drehfrequenz der Räder?
  - Wie groß muss die Bremskraft sein, damit das Fahrzeug nach  $40\text{ m}$  stehen bleibt?

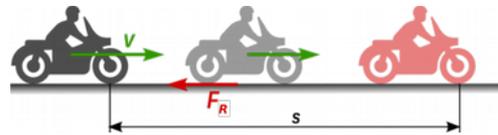


Fig. 78: Motorrad bremsst

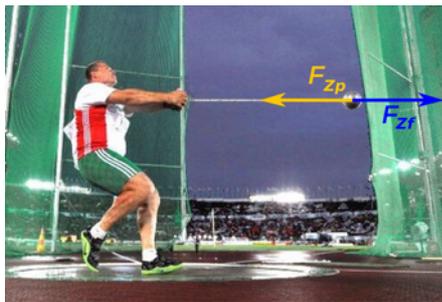


Fig. 79

- Die Masse des Sport-Hammers beträgt  $7,26\text{ kg}$ . Der Athlet schwingt ihn in einem Kreis mit Radius  $1,9\text{ m}$  und dabei erreicht der Hammer eine Geschwindigkeit von  $24\text{ m/s}$ .
  - Wie groß ist die Periode der letzten Umdrehung?
  - Wie groß muss die Kraft sein um den Hammer bei der letzten Umdrehung zu halten?

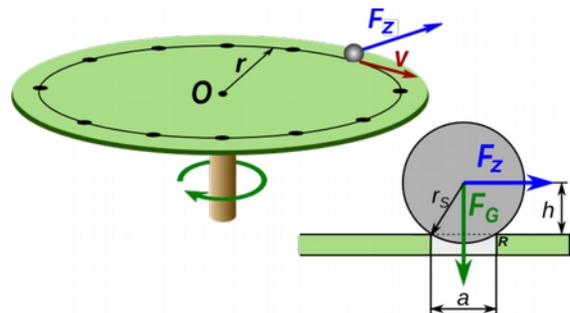


Fig. 80

- Die Lochscheibe wird von einem Motor um die vertikale Achse gedreht. In einer Bohrung mit  $8\text{ mm}$  Durchmesser liegt eine Kugel mit  $16\text{ mm}$  Durchmesser (siehe Fig. 80). Die Drehzahl wird dauernd erhöht und bei  $45$  Umdrehungen pro Minute rollt die Kugel von der Scheibe.  
Wie groß ist der Abstand  $r$  des Lochs von der Achse  $O$ ?

### Antworten

- Die erforderliche Leistung beträgt  $38,8\text{ kW}$ .
- Die Drehfrequenz ist  $11,8\text{ 1/s}$ .
  - Um das Fahrzeug nach  $40\text{ m}$  anzuhalten muss die Kraft  $1730\text{ N}$  betragen.
- Die Periode der letzten Umdrehung beträgt  $0,5\text{ s}$ .
  - Die Kraft, mit der der Hammer gehalten werden muss ist  $2200\text{ N}$ .
- Der Abstand beträgt  $25,5\text{ cm}$

### 3 Elektromagnetische Kraft

#### 3.1 Grundlagen des Magnetismus

##### 3.1.1 Grundlegende magnetische Erscheinungen

###### Versuch 5 - Magnet

Der Versuch von Fig. 81 zeigt, dass ein Magnet manche Münzen anzieht, andere werden nicht angezogen. Welches sind die Eigenschaften, die eine Münze haben muss, damit sie angezogen wird?

Es stellt sich heraus, dass nur die Münzen angezogen werden, welche Eisen, Kobalt oder Nickel enthalten. Münzen aus anderen Metallen, wie Aluminium, Kupfer, Silber oder Messing werden nicht angezogen.



Fig. 81 Manche Münzen werden angezogen

Im Allgemeinen gilt, dass Magnete Körper anziehen, welche wenigstens einen Teil Eisen, Kobalt oder Nickel enthalten. Diese Metalle bezeichnet man als *ferromagnetisch* <sup>(12)</sup>.

Es ist nicht erforderlich, dass die ferromagnetischen Materialien Reinstoffe sind, auch einige ihrer Verbindungen und Legierungen werden angezogen. Ebenso werden einige Eisenerze von Magneten angezogen, aber die Kraft ist geringer.

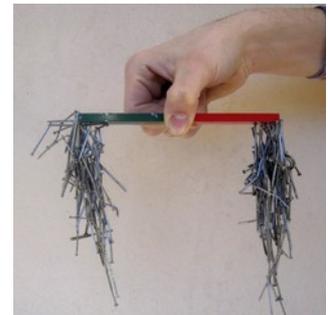


Fig. 82: Die Nägel sammeln sich an den Polen

In den Versuchen von Fig. 82 und Fig. 84 zeigt sich, dass jeder Magnet zwei *Pole* hat, das sind Orte in denen die magnetische Kraft konzentriert zu sein scheint. Wenn man zwei Magnete einander nähert, dann stellt man fest, dass sich die Pole entweder anziehen oder abstoßen. Das bedeutet, dass die Pole unterschiedlich sind.

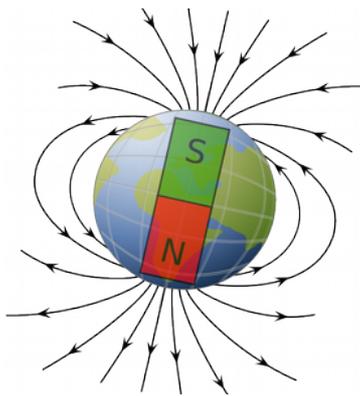


Fig. 83: Die Erde als Magnet

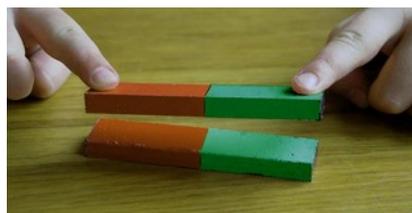


Fig. 84: Gleichnamige Pole stoßen sich ab

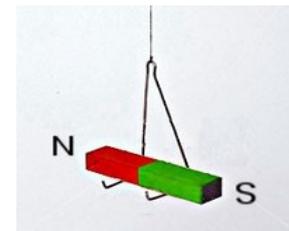


Fig. 85

Wenn ein Magnet so aufgehängt wird, dass er sich frei drehen kann (siehe Fig. 85), dann bewegt er sich, bis er eine Nord-Süd Richtung einnimmt. Die Ursache dafür ist die Tatsache, dass die Erde selber ein riesiger Magnet ist, dessen Pole sich nahe bei den geografischen Polen befinden (siehe Fig. 83). Den Pol eines Magneten, der zum geografischen Nordpol zeigt, bezeichnet man als magnetischen Nordpol, den der zum Südpol der Erde zeigt als magnetischen Südpol. Da sich gleichnamige Pole abstoßen (siehe Fig. 84) ist der geografische Nordpol also der magnetische Südpol der Erde und umgekehrt.

<sup>12</sup> Im Allgemeinen reicht es nicht aus, dass ferromagnetische Materialien die genannten Metalle enthalten. Es ist auch notwendig, dass ihre Temperatur nicht oberhalb der sogenannten *Curie-Temperatur* (768 °C für Eisen), liegt und dass die Atome eine geeignete Kristallstruktur aufweisen (rostfreier Stahl ist häufig nicht ferromagnetisch).

### 3 Elektromagnetische Kraft

Die Versuche von Fig. 81, Fig. 82 und Fig. 86 zeigen eine weitere interessante Eigenschaft der ferromagnetischen Materialien. Man stellt fest, dass sie, wenn sie sich in der Nähe eines Magneten befinden selber zu Magneten d.h. sie werden magnetisiert. Damit das geschieht ist es nicht notwendig, dass sie den Magneten berühren.

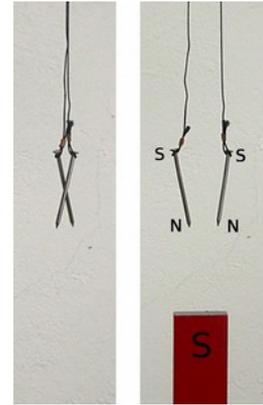


Fig. 86:

Diese Tatsache zeigt deutlich der Versuch von Fig. 86. Ohne den Magneten berühren sich die beiden an einem Faden aufgehängten Nägel. Wenn man den Magneten nähert, dann stoßen sie sich ab. Das geschieht deshalb, weil sie gleichpolig magnetisiert werden. Die gleichnamigen Pole befinden sich an der selben Seite der Nägel und stoßen sich ab.

#### 3.1.2 Erklärung des Magnetismus – Elementarmagnete

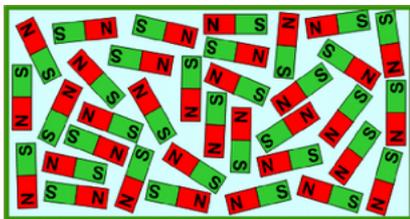


Fig. 87: Elementarmagnete in Unordnung

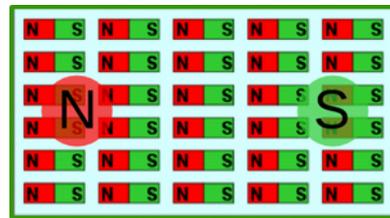
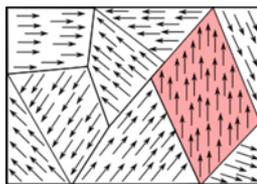


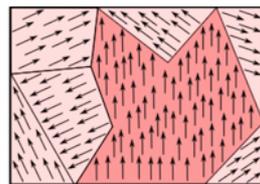
Fig. 88: Elementarmagnete werden durch einen äußeren Magneten geordnet



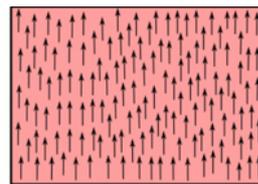
Die magnetischen Eigenschaften können durch ein einfaches Modell erklärt werden. Man kann sich vorstellen, dass ferromagnetische Stoffe aus winzigen Magneten bestehen, welche sich im nicht magnetische Zustand in großer Unordnung befinden und deshalb nach außen hin keinerlei magnetische Wirkung zeigen (siehe Fig. 87). Wenn ein Magnet an den ferromagnetischen Körper angenähert wird, dann richten sich die sogenannten Elementarmagnete aus und die magnetische Wirkung wird außen wahrnehmbar (siehe Fig. 88).



kein äußeres Magnetfeld  
Fig. 90



schwaches äußeres Magnetfeld



starkes äußeres Magnetfeld

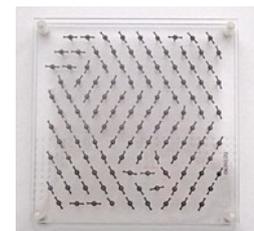


Fig. 89

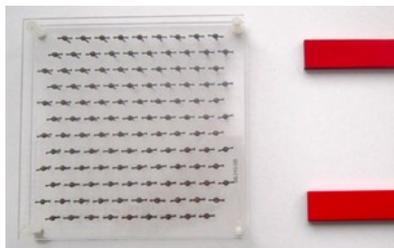


Fig. 91

In Wirklichkeit bestehen die ferromagnetischen Stoffe nicht aus Elementarmagneten. Ihre Kristalle sind aber in kleine Bezirke unterteilt, in denen die sogenannten magnetischen Momente der Atome gleichgerichtet sind (Fig. 90). Wenn sich der Körper in der Nähe eines äußeren Magneten befindet, dann ändern sich die Grenzen zwischen den Bezirken, und diejenigen, in denen das magnetische Moment gleich dem des äußeren Magneten ist, vergrößern sich. Wenn der äußere Magnet ausreichend stark ist, dann breitet sich die Ordnung auf den gesamten Körper aus (letztes Bild von Fig. 90).

Das Demonstrationsgerät in Fig. 89 und Fig. 91, welches aus vielen kleinen Magnetnadeln besteht, ist gut geeignet um den beschriebenen Sachverhalt anschaulich darzustellen.

### 3.1.3 Magnetfeld

Ein Magnetfeld kann durch die Kraftwirkung auf einen ferromagnetischen Körper wahrgenommen werden. Überall dort, wo ferromagnetische Stoffe und bewegte elektrische Ladungen <sup>(13)</sup> eine Kraft erfahren, herrscht ein **Magnetfeld**.

Magnetnadeln sind gut geeignet um ein Magnetfeld zu untersuchen. Wenn in einem Punkt des Raumes eine Magnetnadel eine Kraft erfährt, dann besteht dort ein Magnetfeld. Die Richtung der Nadel gibt die Richtung des Feldes an. Um das Magnetfeld bildlich darzustellen benutzt man **Feldlinien**.

In jedem Punkt geben die Feldlinien eindeutig die Richtung der Kraft an, welche auf den magnetischen Nordpol eines Elementarmagneten (Magnetnadel) wirkt. Die Feldlinien **verzweigen** oder **schneiden** sich nie. Bei einem Magneten gehen die Feldlinien vom Nordpol zum Südpol. In einem Feldlinienbild sind die Feldlinien in jenen Bereichen besonders dicht, in welchen die magnetische Kraft am stärksten ist.

In Fig. 92 ist dargestellt, wie man die Feldlinien konstruieren kann. Wenn sich an einem Punkt in der Nähe eines Magneten der magnetische Nordpol eines Elementarmagneten befindet, dann wird dieser vom Südpol des Magneten angezogen und vom Nordpol abgestoßen. Der Betrag der Kräfte hängt von den jeweiligen Abständen ab. Das Ergebnis für einen Stabmagneten zeigt Fig. 95. Es kann auch mit Eisenspänen dargestellt werden (Fig. 93).

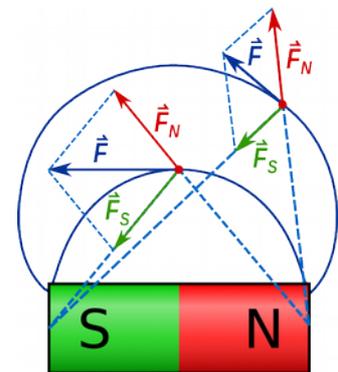


Fig. 92

Fig. 94 zeigt die Feldlinien eines Hufeisenmagneten.

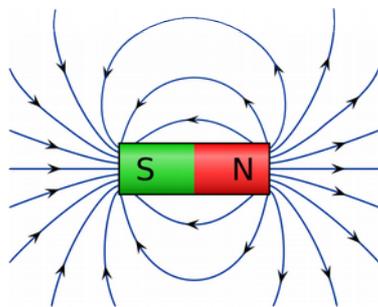


Fig. 95

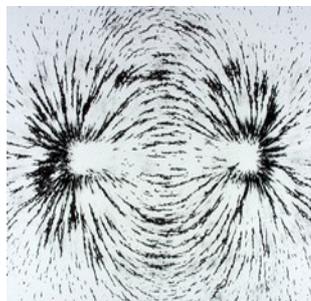


Fig. 93

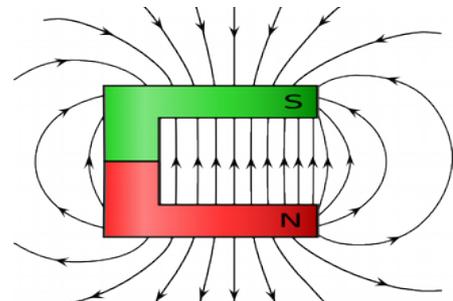


Fig. 94

Wenn sich in einem Raum mehrere Magnete befinden, dann überlagern sich ihre Magnetfelder. Das Ergebnis ist für einige einfache Situationen in den folgenden Bildern dargestellt.

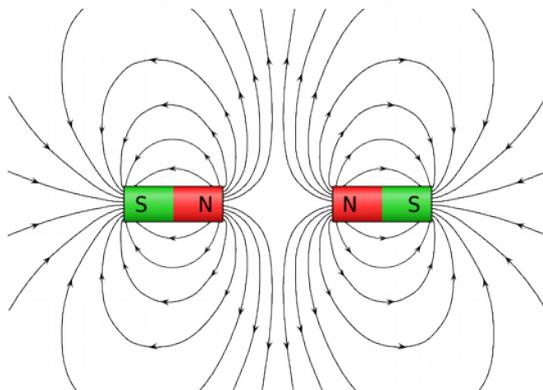


Fig. 96

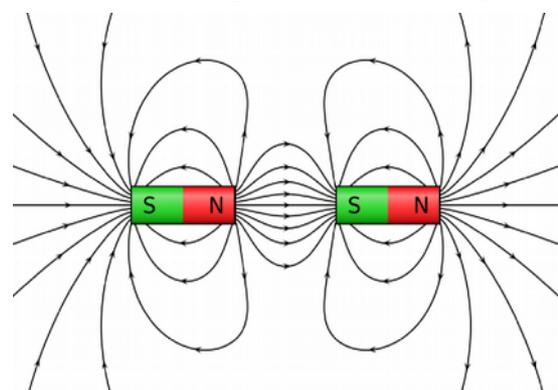


Fig. 97

13 Dieser Sachverhalt wird in den folgenden Paragraphen erklärt, in welchen die Lorentz-Kraft behandelt wird.

## 3.2 Elektrischer Strom und Magnetfeld

### 3.2.1 Magnetfeld des elektrischen Stroms

Im Jahre 1820 entdeckte der dänische Physiker H.C. **Oersted** <sup>(14)</sup> zufällig den Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und Magnetismus. Während eines Versuchs, bei dem er die Wärmewirkung des elektrischen Stroms in einem Leiter zeigen wollte, befand sich eine Magnetnadel in der Nähe des Leiter. Oersted bemerkte, dass wenn er den Strom einschaltete die Nadel sich bewegte und aus der Nord-Süd Richtung abgelenkt wurde.

#### Versuch 6 - Oersted-Versuch

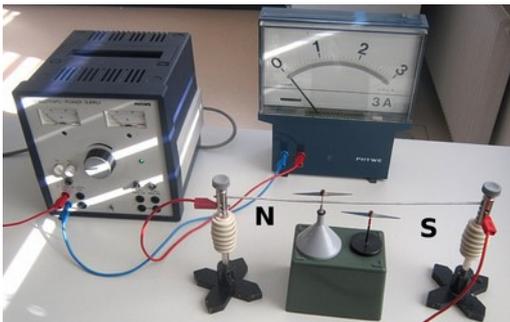


Fig. 98: Durch den Draht fließt kein Strom

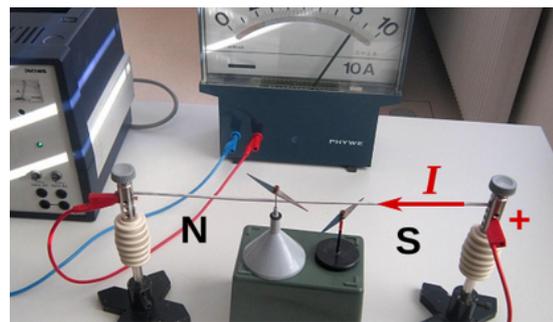


Fig. 99: Durch den Draht fließt starker Strom

Die Fig. 98 und 99 zeigen einen Versuch der in etwa dem von Oersted entspricht. Wenn kein Strom durch den Draht fließt, dann sind die Magnetnadeln parallel zum Draht der in Nord-Süd Richtung verläuft.

Wenn der Strom eingeschaltet wird, dann drehen sich die Nadeln. Man stellt fest, dass sich die Nadel oberhalb des Drahtes nach rechts dreht und die Nadel unterhalb nach links.

Frei bewegliche Magnetnadeln richten sich immer entlang der Feldlinien eines Magnetfeldes aus. Ohne Strom zieht das Erdfeld den Nordpol der Nadel zum geografischen Nordpol. (Fig. 100). Wenn Strom fließt, dann dreht sich die obere Nadel von Versuch 6 nach rechts. Das bedeutet, dass der Strom eine rechtsgerichtete magnetische Kraft erzeugt (Fig. 101).



Fig. 100: Ohne Strom zeigt die Nadel nach Norden

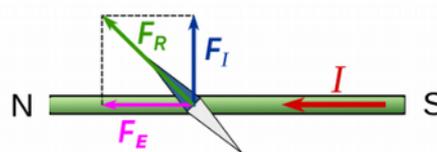


Fig. 101: Mit Strom dreht sich die Nadel

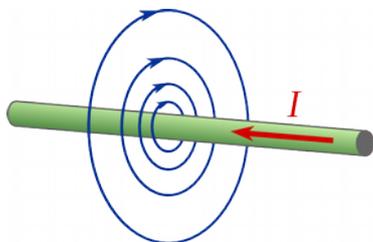


Fig. 103

Aus einer Versuchsreihe ergibt sich, dass in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters ein Magnetfeld entsteht, dessen Feldlinien kreisförmig sind (Fig. 103).

Um die Richtung der Feldlinien zu ermitteln, kann man die sogenannte Rechte-Hand-Regel anwenden.

Wenn die Finger der rechten Hand in die technische Stromrichtung zeigen, dann geben die gekrümmten Finger die Feldrichtung an. (Fig. 102).



Fig. 102

<sup>14</sup> Hans Christian **Oersted** (1785 – 1850) war ein dänischer Physiker und Chemiker. Als Physiker entdeckte er die magnetische Wirkung des Stroms. Als Chemiker war er der erste dem es gelang, Aluminium aus Aluminiumoxid zu gewinnen.

### 3 Elektromagnetische Kraft

Die Feldlinien des stromdurchflossenen Leiters können auch mit Hilfe von Eisenspänen dargestellt werden (siehe Fig. 104).

Das Magnetfeld in der Umgebung eines Leiters ist das Ergebnis der Überlagerung aller Felder die entlang des Leiters erzeugt werden. Wenn der Leiter nicht gerade ist, dann sind die Feldlinien keine Kreise.

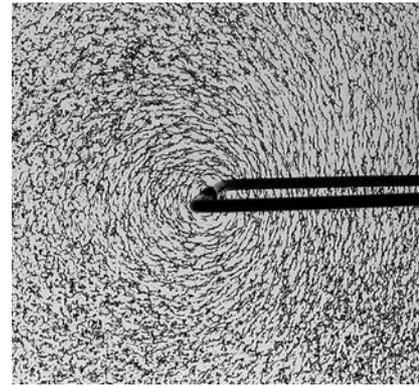


Fig. 104: Ferfajdieĵo montras kampon

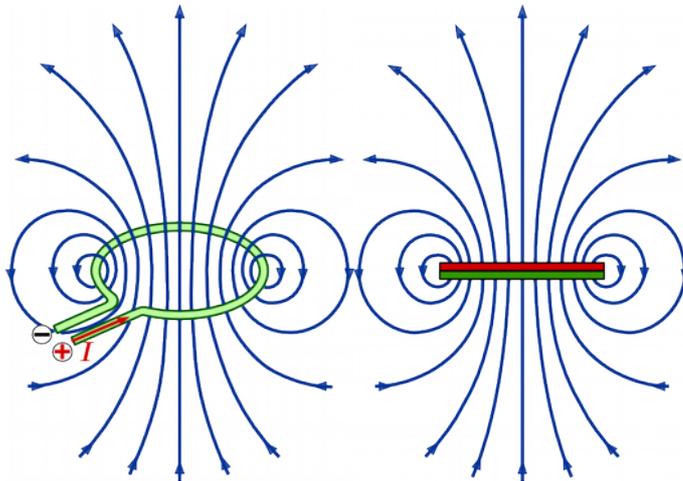


Fig. 105

Fig. 106

So ist zum Beispiel das Feld einer stromdurchflossenen Leiterschleife so wie in Fig. 105 dargestellt. Es entspricht dem Feld eines sehr kurzen Dauermagneten Fig. 106.

In Fig. 107 sind die magnetischen Feldlinien innerhalb und außerhalb einer stromdurchflossenen Spule dargestellt. Innerhalb sind die Feldlinien weitgehend parallel und überall gleich dicht. Das heißt, dass das Feld im Inneren überall den selben Betrag und die selbe Richtung hat, es ist **homogen**. Außerhalb gleicht das Feld dem eines Stabmagneten.

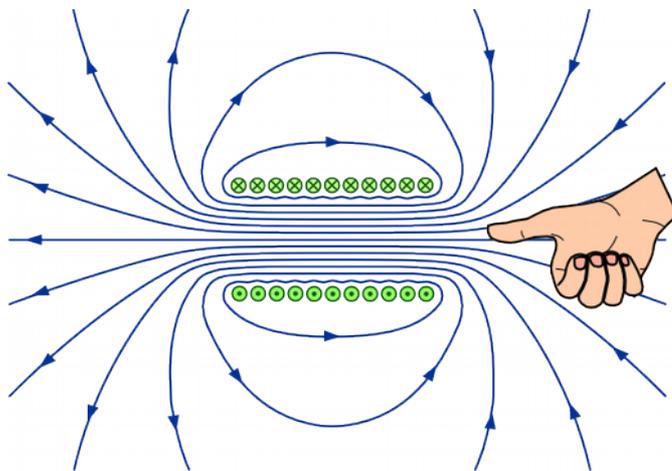


Fig. 107

In Fig. 107 ist ein Längsschnitt der Spule dargestellt. Um die Richtung des Stroms anzuzeigen, werden die Symbole von Fig. 108 verwendet. Wenn der Strom (als Pfeil dargestellt) zum Betrachter fließt und man also die Pfeilspitze sieht, dann zeichnet man einen Punkt  $\bullet$ , wenn der Strom vom Betrachter weg fließt, dann



zeichnet man ein X. Diese Symbole werden in der Folge auch für andere Vektorgrößen verwendet.



Fig. 108



Wie in Fig. 107 dargestellt, kann man

auch die Richtung des Feldes in Inneren einer Spule mit einer **Rechte-Hand-Regel** herausfinden. Wenn die gekrümmten Finger der rechten Hand in Stromrichtung zeigen, dann zeigt der abgespreizte Daumen die Feldrichtung in der Spule an. Die Fig. 109 zeigt Eisenspäne die sich im Feld einer Spule entlang der Feldlinien ausgerichtet haben.



Fig. 109

### 3.2.2 Magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

Wenn in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters ein Magnet eine Kraft erfährt, dann muss, wegen des Gesetzes von Aktion und Reaktion, auch der stromdurchflossene Leiter in der Nähe eines Magneten eine Kraft erfahren. Praktisch zeigt das der folgende Versuch.

#### Versuch 7 - Leiterschaukel-Versuch

Eine Schaukel bestehend aus zwei leitenden Bändern, welche durch ein Aluminiumröhrchen verbunden sind, wird an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. Das Röhrchen befindet sich zwischen den Armen eines Hufeisenmagneten.

Ohne Strom hängt die Schaukel senkrecht (Fig. 110). Wenn Strom in der dargestellten Richtung (siehe Fig. 111) durch die Schaukel fließt, dann bewegt sie sich nach rechts.

Wenn man die Stromrichtung umkehrt, dann bewegt sich die Schaukel nach links.

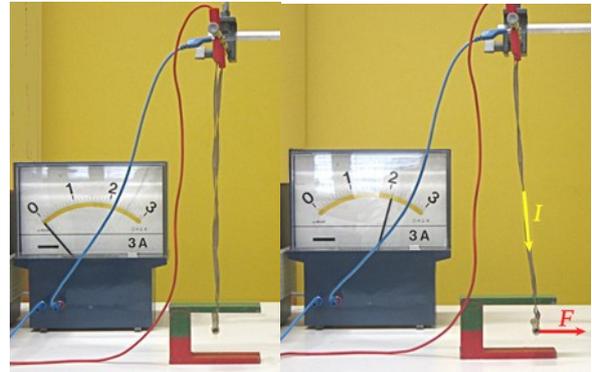


Fig. 110

Fig. 111

Wie in Par. 3.1.3 Gezeigt wurde, gehen die magnetischen Feldlinien vom Nord- zum Südpol. Wenn durch das Aluminiumröhrchen Strom fließt, dann entsteht in seiner Umgebung ein Magnetfeld mit kreisförmigen Feldlinien (siehe Fig. 113).

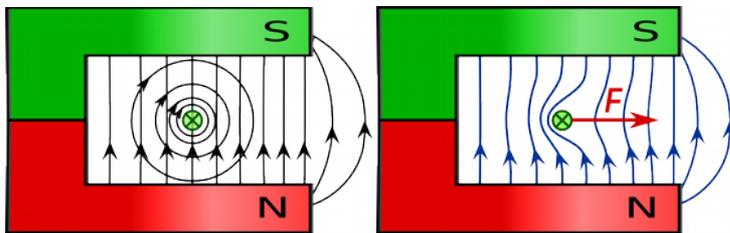


Fig. 113

Fig. 112

Die Felder des Magneten und des Röhrchens überlagern sich. Links vom Röhrchen sind sie gleichgerichtet, deshalb verstärkt sich dort das Feld und die Feldlinien verdichten sich. Rechts vom Röhrchen sind die Felder entgegengesetzt gerichtet, das Feld des Magneten wird abgeschwächt und die Feldlinien sind

weiter auseinander. Das resultierende Feld zeigt die Abbildung Fig. 112.

Aus Versuch 7 wird deutlich, dass wenn durch die Schaukel Strom fließt, auf das Alu-Röhrchen eine Kraft wirkt, welche das Röhrchen nach rechts, d.h. von der stärkeren Seite des Feldes zur schwächeren hin, drückt. Letzteres wird auch bei Umkehrung der Stromrichtung bestätigt. Dann wirkt die Kraft nach links, ebenfalls von der stärkeren Seite des Feldes zu

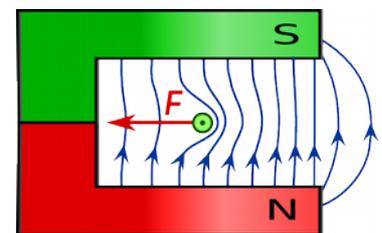


Fig. 114

schwächeren (siehe Fig. 114).

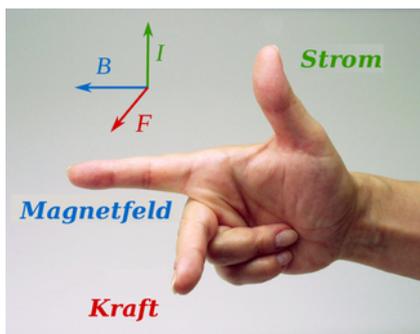


Fig. 115: Erste Drei-Finger-Regel

Aus Versuch 7 ergibt sich auch die erste Drei-Finger-Regel welche bei der Ermittlung der Richtung der Kraft auf den Strom im Magnetfeld hilfreich ist.

Wenn der Daumen der rechten Hand in Stromrichtung zeigt und der abgespreizte Zeigefinger in Feldrichtung, dann gibt der abgespreizte Mittelfinger die Richtung der Kraft auf den Strom an (siehe Fig. 115).

### 3.2.3 Messung des Magnetfelds

Die Kraft, welche auf den elektrischen Strom in einem Magnetfeld wirkt, ist gut geeignet um die Stärke eines Feldes zu definieren und zu messen. Dazu wird der Versuch 3 so abgeändert, dass die Kraft gemessen werden kann.

#### Versuch 8 - Messung der Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter

In diesem Versuch wird das stromdurchflossene Alu-Röhrchen an einen Kraftmesser gehängt. So kann die Kraft in Abhängigkeit von der Stromstärke gemessen werden. Anhand der Messwerte der folgenden Tabelle kann man ein I-F Diagramm zeichnen (siehe Fig. 117).

MP	I [A]	F[mN]
1	1,0	1,5
2	2,2	3,5
3	3,1	5,0
4	4,0	6,5
5	5,3	8,5

Tab. 6

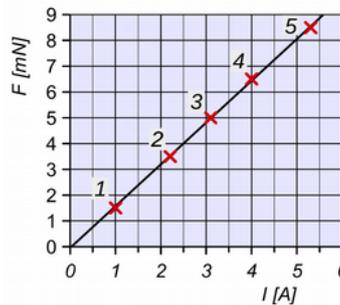


Fig. 117

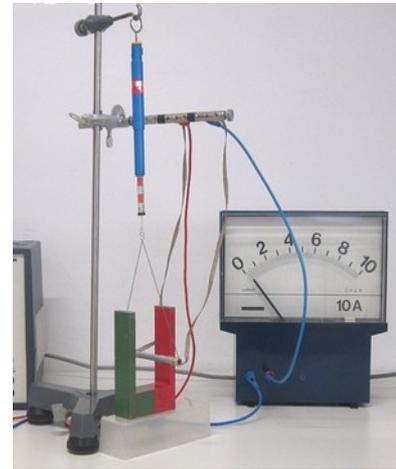


Fig. 116

Aus dem Diagramm Fig. 117 ergibt sich, dass die Messpunkte gut durch eine Ausgleichsgerade angenähert werden. Folglich ist in einem bestimmten Magnetfeld die Kraft proportional der Stromstärke  $F \propto I$

Aus anderen Versuchen, bei denen die Länge  $s$  des Leiters, der sich im Feld befindet, geändert wird (siehe Fig. 118), ergibt sich, dass für eine bestimmte Stromstärke die Kraft proportional der Länge ist  $F \propto s$

Insgesamt ist also die Kraft, welche auf den stromdurchflossenen Leiter wirkt, proportional der Leiterlänge und der Stromstärke

$$F \propto I \cdot s$$

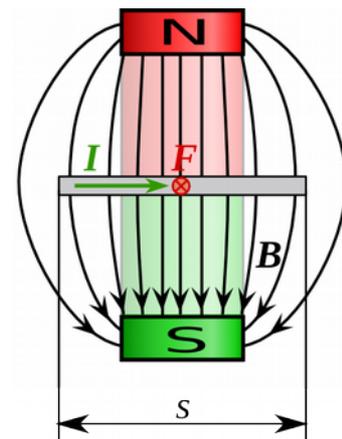


Fig. 118: Draufsicht

Daraus ergibt sich für ein bestimmtes Magnetfeld  $\frac{F}{I \cdot s} = \text{konstant}$

Diese Konstante eignet sich als Messgröße für die Stärke eines Magnetfeldes. Wir nennen sie **Magnetfeld  $B$** , wobei  $B$  das entsprechende Formelzeichen ist <sup>(15)</sup>.

$$B = \frac{F}{I \cdot s} \quad \text{Für die Maßeinheit ergibt sich} \quad [B] = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \text{ T (Tesla)}$$

Das **Tesla** wurde nach dem serbischen Ingenieur Nikola Tesla benannt.<sup>(16)</sup>

<sup>15</sup> In der deutschsprachigen Fachliteratur wird  $B$  auch als **magnetische Induktion  $B$**  oder **magnetische Flussdichte  $B$**  bezeichnet. Der zweite Begriff wird später erklärt werden, der erste wird in diesem Buch nicht verwendet, weil er Anlass zu Verwechslungen bietet.

<sup>16</sup> Nikola **Tesla** (1856–1943) war ein Elektroingenieur und Erfinder. Er wurde in Kroatien geboren, das damals Teil von Österreich-Ungarn war, und studierte in Graz. 1884 wanderte er in die USA aus. Unter anderem propagierte er die Verwendung von Wechselstrom und erfand den Asynchronmotor.

### 3 Elektromagnetische Kraft

In Versuch 8 beträgt die Länge des Alu-Röhrchens  $s = 11 \text{ cm}$ . Ein Messpunkt welcher nahe an der Ausgleichsgeraden liegt ist Punkt 3, mit  $I = 3,1 \text{ A}$  und  $F = 5,0 \text{ mN}$ .

Das Magnetfeld beträgt also im Mittel <sup>(17)</sup>  $B = \frac{F}{I \cdot s} = \frac{5,0 \text{ N}}{3,1 \text{ A} \cdot 0,11 \text{ m}} = 15 \text{ mT}$

Man sieht, dass obwohl der Magnet von Versuch 8 relativ stark ist, sein Magnetfeld "nur"  $15 \text{ mT}$  beträgt.

Tatsächlich ist **1 Tesla** ein sehr großer Wert für ein Magnetfeld. Das Feld der stärksten Dauermagneten (NdFeB-Magnete) liegt bei etwa  $1,5 \text{ T}$ . Das Erdfeld beträgt am Äquator etwa  $3,1 \times 10^{-5} \text{ T}$ .

#### 3.2.4 Berechnung der elektromagnetischen Kraft

Wenn der Strom senkrecht zu den magnetischen Feldlinien fließt, dann ergibt sich für die Kraft aus der obigen Formel

$$F = B \cdot I \cdot s$$

Wenn die Stromrichtung nicht senkrecht zur Feldrichtung verläuft, dann muss man entweder die Komponente des Feldes ermitteln, welche senkrecht zum Strom ist, oder die Komponente der Leiterlänge welche senkrecht zu den Feldlinien ist. In beiden Fällen erhält man für die Kraft:

$$F = B \cdot I \cdot s \cdot \sin \alpha$$

Wenn  $\alpha = 0^\circ$  dann fließt der Strom parallel zum Feld und die Kraft ist Null.

Wenn  $\alpha = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = 1$  fließt der Strom senkrecht und obige Formel gilt.

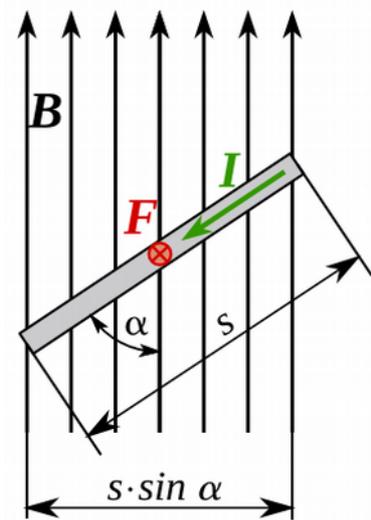


Fig. 119

#### Beispiel 30

Nahe am Äquator beträgt das Erdmagnetfeld etwa  $30 \mu\text{T}$ .

Wie groß ist die Kraft, die dort auf eine 1 Kilometer lange Elektroleitung wirkt, in welcher ein Strom von  $1500 \text{ A}$  fließt

- wenn der Strom dem Äquator entlang nach Westen fließt?
- wenn der Strom in einem Winkel von  $30^\circ$  nach Nordosten fließt?

#### Lösung

$$B = 30 \mu\text{T} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad I = 1500 \text{ A} \quad s = 1000 \text{ m}$$

- $\alpha = 90^\circ \quad F = B \cdot I \cdot s = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 1500 \text{ A} \cdot 1000 \text{ m} = 45 \text{ N}$  nach unten gerichtet
- $\alpha = 30^\circ \quad F = B \cdot I \cdot s \cdot \sin \alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 1500 \text{ A} \cdot 1000 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 22,5 \text{ N}$  nach oben

Man sieht, dass auch bei großen Stromstärken die Kraft auf einen Leiter im Erdmagnetfeld verglichen mit der Gewichtskraft sehr klein ist. Wenn sich aber die Stromrichtung dauernd ändert, so wie das bei Wechselspannungsleitungen der Fall ist, dann reicht die elektromagnetische Kraft aus um Schwingungen zu erzeugen, welche als Summen bei Hochspannungsleitungen hörbar sind.

<sup>17</sup> Nachdem das Feld in der Umgebung des Leiters nicht homogen ist, ergibt die Rechnung einen Mittelwert des Feldes in dieser Umgebung.

### 3 Elektromagnetische Kraft

#### Versuch 9 - Bestimmung des Magnetfelds mit Hilfe der Leiterschaukel

In diesem Versuch wird eine Leiterschaukel aus einem dicken Alu-Draht verwendet, um zuerst die Kraft im Magnetfeld des Hufeisenmagneten und anschließend die Größe des Magnetfeldes zu bestimmen.

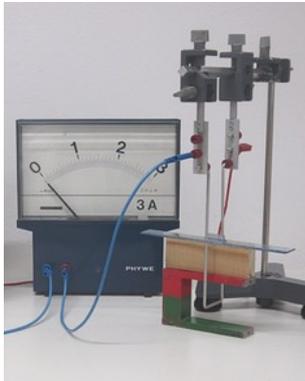


Fig. 121

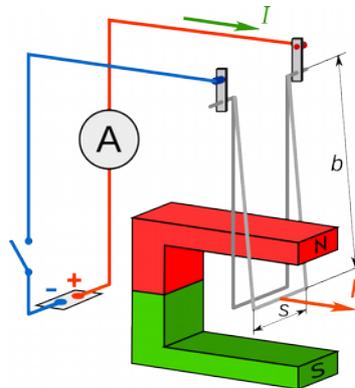


Fig. 122

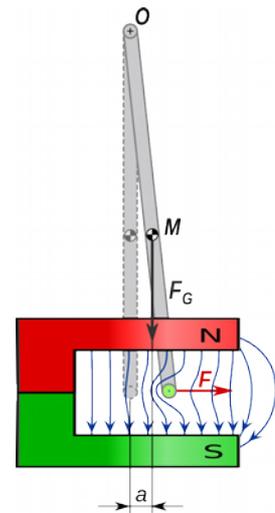


Fig. 120

Die Masse der Schaukel beträgt  $m = 15 \text{ g}$  und die Lage des Schwerpunkts ist bekannt.

Der waagrechte Teil der Schaukel, welcher senkrecht zu den Feldlinien verläuft hat eine Länge  $s = 4,8 \text{ cm}$  und sein Abstand vom Drehpunkt beträgt  $b = 19,5 \text{ cm}$ .

Wenn durch die Schaukel Strom in der im Bild eingezeichneten Richtung fließt, dann bewegt sich die Schaukel nach rechts. Der Schwerpunkt verschiebt sich bei einer Stromstärke  $I = 2,8 \text{ A}$  um  $a = 5 \text{ mm}$ .

Bezogen auf den Drehpunkt  $O$  erzeugt die elektromagnetische Kraft ein Drehmoment  $M_F$  welches durch das Drehmoment der Gewichtskraft  $M_G$  im Gleichgewicht gehalten wird.

Gleichgewicht  $M_F = M_G \rightarrow F \cdot b = F_G \cdot a$  <sup>(18)</sup>

Die elektromagnetische Kraft ist  $F = \frac{F_G \cdot a}{b} = \frac{m \cdot g \cdot a}{b} = \frac{15 \text{ g} \cdot 9,81 \frac{\text{mN}}{\text{g}} \cdot 5 \text{ mm}}{195 \text{ mm}} = 3,8 \text{ mN}$

und der Mittelwert des Magnetfeldes  $B = \frac{F}{I \cdot s} = \frac{3,8 \text{ mN}}{2,8 \text{ A} \cdot 0,048 \text{ m}} = 28 \text{ mT}$

Dieses Ergebnis für das mittlere Magnetfeld ist etwas größer als der Wert aus Versuch 8 weil der waagrechte Teil der Schaukel kürzer ist ( $4,8 \text{ cm}$  anstatt  $11 \text{ cm}$ ). Deshalb befindet er sich fast vollständig in dem Bereich wo das Magnetfeld groß ist (siehe Fig. 118).

#### Versuch 10 - Spule auf Pol des Hufeisenmagneten

Eine Spule umschließt einen Pol eines Hufeisenmagneten (siehe Fig. 123). Wenn man den Strom einschaltet, dann wird die Spule mit relativ großer Kraft vom Magneten abgestoßen.

Der Grund dafür ist, dass auch in diesem Fall die Stromrichtung in der Spule in einigen Teilen senkrecht zum Feld verläuft. Folglich entsteht eine Kraft senkrecht zur Feld- und zur Stromrichtung. Diese Kraft wirkt auf jede Windung der Spule. Je mehr Windungen die Spule hat, desto größer ist die Kraft.

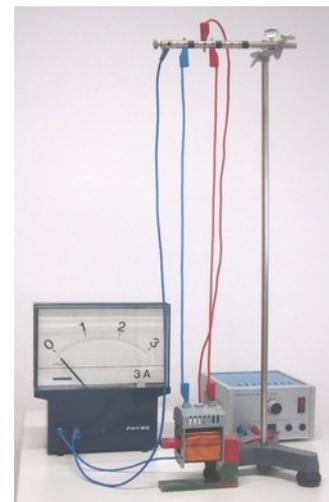


Fig. 123

<sup>18</sup> Genau genommen müsste man gegenüber  $O$  als Hebelarm  $b \cdot \cos \alpha$  verwenden. Aber der Drehwinkel ist sehr klein, somit ist  $\cos \alpha$  nahe bei 1 und der Fehler ist vernachlässigbar.

### 3.2.5 Leiterschleife und Spule im Magnetfeld

Strom fließt durch eine rechteckige Leiterschleife (siehe Fig. 124). Die linke Seite A-B und die rechte Seite C-D sind senkrecht zu den Feldlinien und deshalb entsteht eine Kraft. Da der Strom in den beiden Seiten entgegengesetzt gerichtet ist, gilt dies auch für die Kräfte, welche so wirken wie in Fig. 125 dargestellt. Die obere und die untere Seite der Leiterschleife, also B-C und A-D sind nahezu parallel zu den Feldlinien und die Kraft ist deshalb vernachlässigbar.

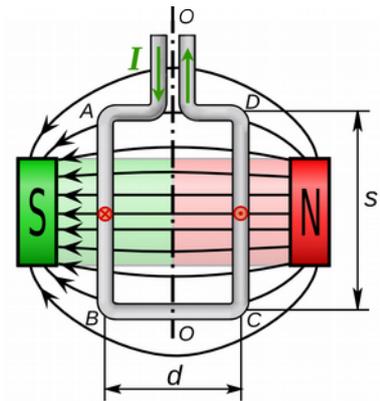


Fig. 124

Die beiden Kräfte  $F = B \cdot I \cdot s$  erzeugen ein Drehmoment, welches zu Beginn, wenn sich die Leiterschleife in der dargestellten Position von Fig. 125 befindet, gleich ist

$$M_{90} = 2 \cdot F \cdot \frac{d}{2} = F \cdot d = B \cdot I \cdot s \cdot d$$

Wegen des Drehmoments dreht sich die Leiterschleife um die Achse O-O (Fig. 124) und dadurch ändert sich der Hebelarm der Kräfte  $F$ , welcher kleiner wird und, wie in Fig. 126 gezeigt, gleich  $d \cdot \sin \alpha$  wird. Für einen Winkel  $\alpha$  wird das Drehmoment somit

$$M_{\alpha} = B \cdot I \cdot s \cdot d \cdot \sin \alpha$$

Es ergibt sich, dass in der dargestellten Situation der maximale mögliche Drehwinkel etwas weniger als  $90^\circ$  beträgt, weil wenn  $\alpha = 90^\circ$  wird der Hebelarm Null und somit wird unabhängig von der Kraft auch das Drehmoment Null.

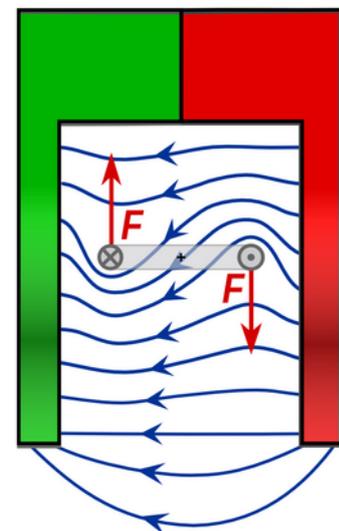


Fig. 125: Draufsicht

Wenn sich in einem Magnetfeld eine Spule befindet (Fig. 127), dann wirkt das Drehmoment auf alle Windungen der Spule und folglich ergibt sich für eine Spule mit  $N$  Windungen ein maximales Drehmoment

$$M_{\alpha} = N \cdot B \cdot I \cdot s \cdot d \cdot \sin \alpha$$

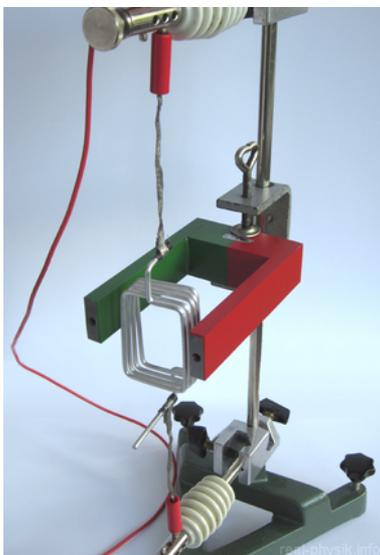


Fig. 127

#### Versuch 11

#### Spule im Magnetfeld

Wenn sich eine Spule in einem Magnetfeld befindet, so wie in Fig. 127 dargestellt, dann kann man gut beobachten, dass sich die Spule um so mehr dreht, je größer die Stromstärke ist.

Wenn sich der Drehwinkel aber dem Wert von  $90^\circ$  nähert, dann ist auch durch eine starke Erhöhung des Stroms keine weitere Vergrößerung des Drehwinkels mehr möglich. Der Hebelarm wird immer kleiner und auch wenn die Kraft zunimmt, erfolgt keine Zunahme des Drehmoments mehr.

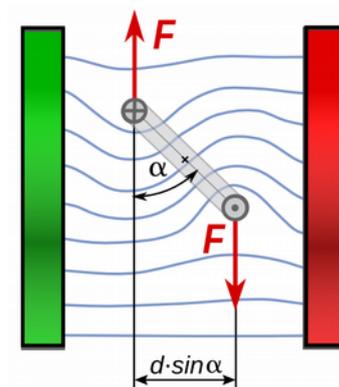


Fig. 126

### 3.2.6 Kraft zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern

#### Versuch 12 - Kraft zwischen parallelen Leitern

In Versuch von Fig. 128 sind die beiden Leiter so angeschlossen, dass wenn sie kurzzeitig <sup>(19)</sup> an die Batterie angeschlossen werden der Strom in ihnen **gleichgerichtet** ist. Man sieht, dass während der Strom fließt, die beiden Leiter sich anziehen.

Wenn man die Anschlüsse so ändert, dass der Strom in den beiden parallelen Leitern entgegengesetzt gerichtet ist, dann stoßen sie einander ab.

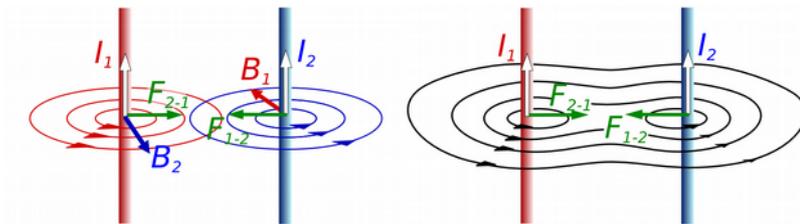


Fig. 130: Einzelfelder der beiden Leiter

Fig. 129: Resultierendes Feld der beiden Leiter

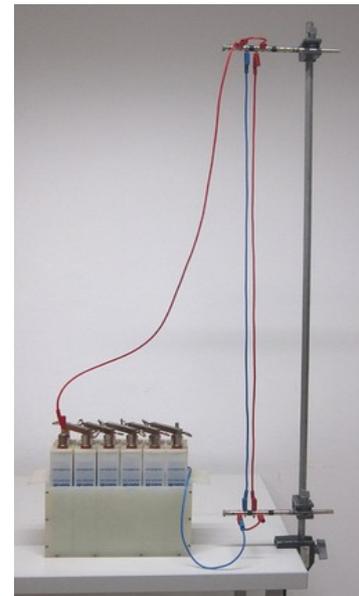


Fig. 128: Parallele Leiter

Wenn ein Leiter sich in der Nähe eines anderen Leiters befindet und beide von Strom durchflossen sind, dann befindet sich jeder der beiden Leiter im Magnetfeld des anderen.

Wenn die Leiter parallel sind und die Ströme gleichgerichtet, dann ergibt sich die Situation von Fig. 130 und Fig. 129. Nach der ersten Drei-Finger-Regel ziehen die Leiter einander an.

Wenn die Ströme in den beiden Leitern entgegengesetzt gerichtet sind, ergibt sich die Situation von Fig. 131 und Fig. 132. Nach der Drei-Finger-Regel stoßen sich die Leiter ab.

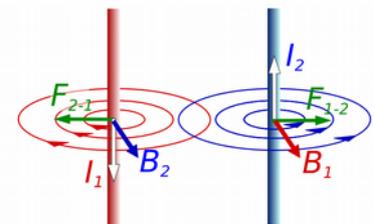


Fig. 131: Einzelfelder der beiden Leiter

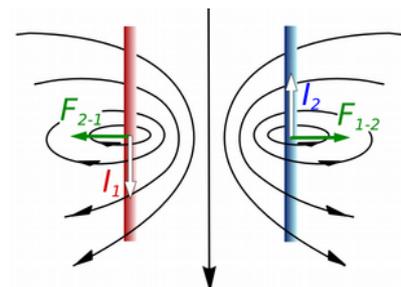


Fig. 132: Resultierendes Feld der beiden Leiter

### 3.2.7 Definition der Maßeinheit Ampere

Die Kraft welche zwischen stromdurchflossenen Leitern wirkt, bietet eine gute Möglichkeit die elektrischen Maßeinheiten mit den mechanischen zu verbinden. Die amtliche Definition der Maßeinheit Ampere im SI-System ist:

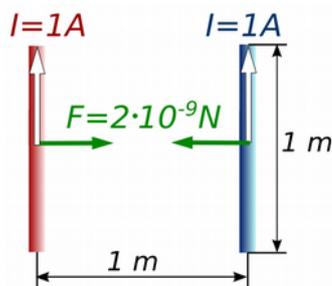


Fig. 133

*Ein Ampere ist die Stärke des zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der im Vakuum zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Leitern und dem Abstand von 1 m zwischen diesen Leitern eine Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton pro Meter Leiterlänge hervorrufen würde. (Fig. 133)*

<sup>19</sup> Man darf die Leiter nur für sehr kurze Zeit an die Batterie anschließen, weil die Schaltung praktisch einen Kurzschluss darstellt und die Batterie bei längerer Dauer durch den hohen Strom beschädigt würde.

### 3.3 Analoge Strommessgeräte

Analoge Strommessgeräte (*Amperemeter*) sind diejenigen, bei denen der Messwert mit Hilfe eines Zeigers und einer Skala angegeben wird.

Es gibt verschiedene Funktionsprinzipien auf deren Basis analoge Amperemeter funktionieren. Die wichtigsten beruhen auf den elektromagnetischen Eigenschaften des Stroms und sind

- *Drehspulmessgerät*
- *Dreheisenmessgerät*



Fig. 134: Analoges Messgerät

#### 3.3.1 Drehspulmessgerät



Fig. 135: Drehspulmessgerät

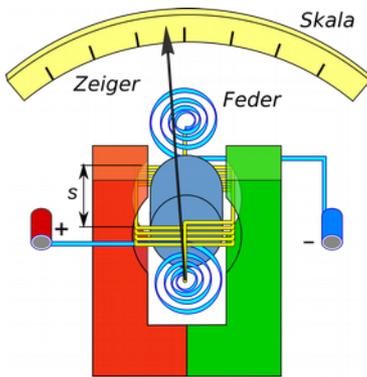


Fig. 137: Drehspulmessgerät

In Par. 3.2.5 ist das Drehmoment beschrieben worden, welches in einem Magnetfeld auf eine stromdurchflossene Spule wirkt. Das Drehmoment und folglich auch der Drehwinkel hängt von der Stromstärke ab. Das dargestellte Prinzip ist also für eine Strommessgerät verwendbar.

Damit sich der Zeiger mehr als 90° drehen kann und besonders auch damit das Drehmoment nicht vom Drehwinkel abhängt, befindet sich die Spule auf einem Eisenzyylinder und die Polschuhe sind bearbeitet wie in Fig. 135 und Fig. 137 dargestellt. Dadurch ist das Magnetfeld in dem Bereich in dem sich die Spule befindet **radial**. Die magnetische

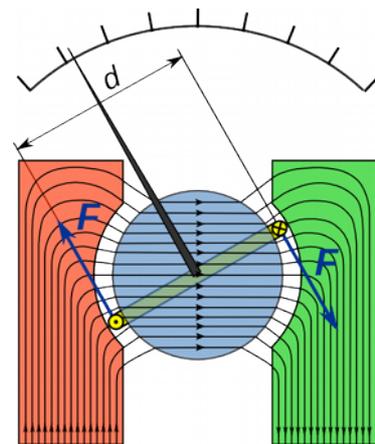


Fig. 136 Spule im Magnetfeld

Kraft ist dort stets senkrecht zum Hebelarm, der somit stets gleich dem halben Durchmesser  $d$  ist (siehe Fig. 136). Das Drehmoment hängt so nur von der Stromstärke in der Spule ab. Und die Skala ist linear. Da die Richtung der Kraft, und somit auch des Drehmoments, von der Stromrichtung abhängt, funktionieren Drehspulinstrumente nur mit Gleichstrom und müssen polrichtig angeschlossen werden.

#### Beispiel 31

Die Spule eines Amperemeters hat 60 Windungen. Damit sie sich um 90° dreht ist ein Drehmoment von  $4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$  erforderlich. Die Abmessungen des Geräts sind  $s = 2 \text{ cm}$  und  $d = 2,5 \text{ cm}$ .

Wie groß muss das Magnetfeld in dem sich die Spule dreht sein, damit die 90° Drehung mit einem Strom von  $0,5 \text{ mA}$  erreicht wird?

Lösung  $M = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$      $I = 0,5 \text{ mA}$      $N = 60$      $s = 0,02 \text{ m}$      $d = 0,025 \text{ m}$

$$M = N \cdot B \cdot I \cdot s \cdot d \quad \rightarrow \quad B = \frac{M}{N \cdot I \cdot s \cdot d} = \frac{4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}}{60 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 0,025 \text{ m}} = 0,3 \text{ T}$$

### 3.3.2 Dreheisenmessgerät

#### Versuch 13 - Zwei Eisenstäbe in einer Spule

Zwei Eisenstäbe befinden sich in einer leicht geneigten Spule. Ohne Strom berühren die Stäbe einander. Wenn Strom durch die Spule fließt, dann stoßen sich die Stäbe ab, und zwar um so mehr je größer die Stromstärke ist. (siehe Fig. 138).

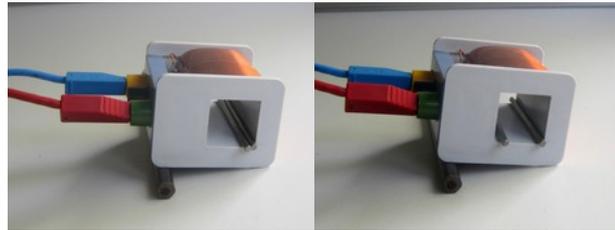


Fig. 138 Spule: ohne Strom - stromdurchflossen

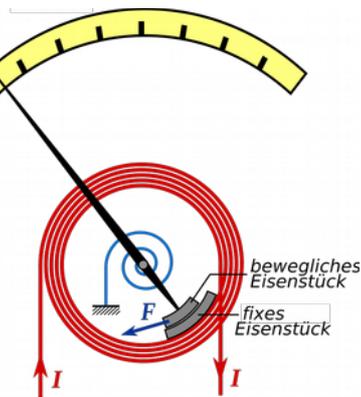


Fig. 139: Prinzip eines Dreheiseninstruments

Das Prinzip von Versuch 13 wird in einem Dreheisenmessgerät eingesetzt. Zwei Eisenstücke befinden sich im Inneren einer fixen Spule, durch welche der zu messende Strom fließt. Eines der Eisenstücke ist an der Spule befestigt, das andere am Zeiger (Fig. 139).

Wie bereits in Par. 3.2.1 gezeigt wurde, erzeugt der Strom in der Spule ein Magnetfeld, wodurch die beiden Eisenstücke gleichgerichtet magnetisiert werden. Folglich befinden sich die gleichnamigen Pole der Eisenstücke nahe beieinander und stoßen sich ab.

Diese Art von Messgerät funktioniert mit Gleichstrom und mit Wechselstrom (im Gegensatz zum Drehspulinstrument).

Unabhängig von der Stromrichtung ist die Magnetisierung der beiden Eisenstücke stets gleichgerichtet und folglich stoßen sie sich ab. Bei Wechselstrom ändert sich die Magnetisierungsrichtung periodisch und deshalb ist die Kraftwirkung schwächer. Es wird also für die beiden Stromarten eine geeignete eigene Skala benötigt.

Die abstoßende Kraft zwischen den Eisenstücken hängt nicht nur vom Strom ab, sondern auch vom Abstand zwischen den Eisenstücken. Wenn der Abstand größer wird, wird die Kraft kleiner. Deshalb haben diese Messgeräte keine lineare Skala. Sie haben einen bestimmten Messbereich, in welchem sie relativ genau messen. So misst z.B. das Gerät von Fig. 140, am genauesten zwischen 5 A und 25 A. Das Gerät von Fig. 142 misst am genauesten zwischen 2 A und 10 A.

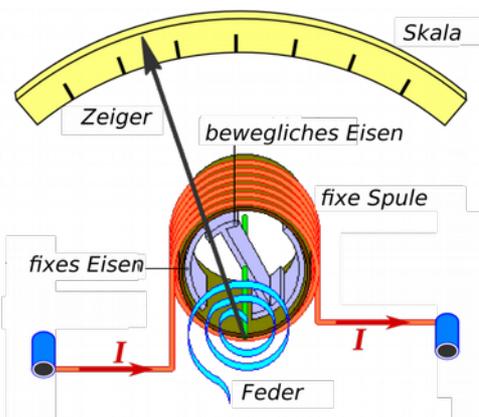


Fig. 141



Fig. 140



Fig. 142

### 3.4 Elektromotoren

#### 3.4.1 Gleichstrommotoren

Das in Paragraph 3.2.5 gezeigte Prinzip ist für den Bau eines Elektromotors geeignet. Es genügt eine Vorrichtung zu finden, welche die Stromrichtung genau in dem Moment umkehrt in dem die Ebene der Spule senkrecht zu den Feldlinien ist und das Drehmoment folglich Null ist. Wenn das gelingt, dann wirkt das Drehmoment stets in die selbe Richtung und die Spule dreht sich (siehe Fig. 143).

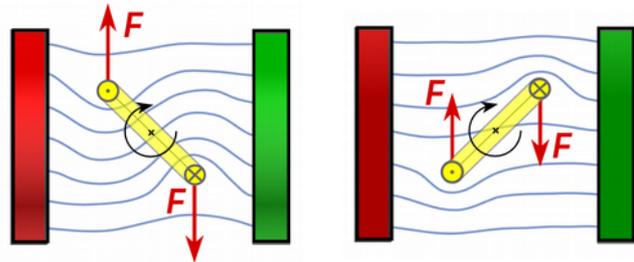


Fig. 143

Man löst das Problem mit Hilfe eines geteilten Kollektorringes (**Kommutator**), dessen Hälften untereinander isoliert sind (Fig. 144). Wenn die Spule sich in senkrechter Position befindet, dann wechseln die Kontaktbürsten von einer Kollektorhälfte auf die andere (Fig. 145), die Stromrichtung kehrt sich um und

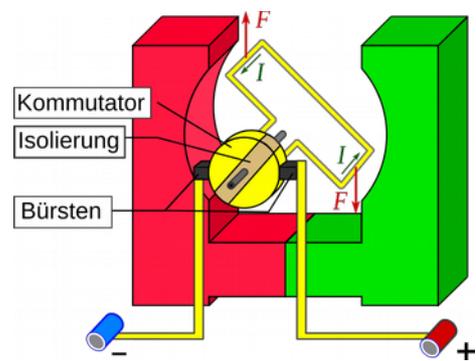


Fig. 144

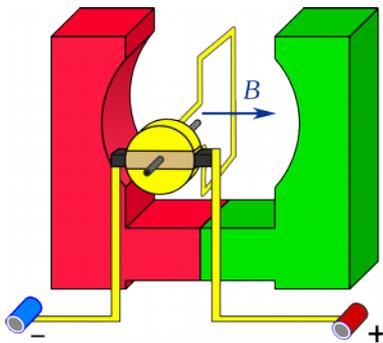


Fig. 145

das das Drehmoment wirkt weiter in die selbe Richtung.

Der Betrag des Drehmoments, das auf die Spule wirkt, ändert sich im Verlauf der Umdrehung. Er ist am größten, wenn die Ebene der Spule parallel zu den Feldlinien ist (Fig. 146) und er ist Null, wenn sie senkrecht zu den Feldlinien steht.

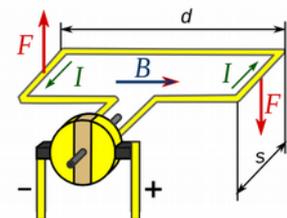


Fig. 146

Das maximale Drehmoment beträgt  $M_{max} = 2 \cdot F \cdot \frac{d}{2} = F \cdot d = B \cdot I \cdot s \cdot d$

Um das Drehmoment zu vergrößern verwendet man eine Spule mit vielen Windungen. Das maximale Moment wird dann  $M_{max} = N \cdot B \cdot I \cdot s \cdot d$  wo  $N$  die Anzahl der Windungen ist. Praktisch ist die Formel ziemlich ungenau, weil sich nicht alle Windungen genau auf der Rotationsachse befinden.

Um das Magnetfeld im Inneren der Spule zu vergrößern wird sie auf einen Eisenkern gewickelt. Das Ganze wird **Rotor** genannt.

Fig. 147 Zeigt eine andere Erklärung für die Ursache der Bewegung und die Notwendigkeit eines Kommutators. Wenn der Strom die Spule durchfließt, dann wird der Eisenkern zum Magneten. Wenn der Kern parallel zu den Feldlinien ist, dann muss sich die Stromrichtung umkehren, weil nur dann gleichnamige Pole nahe beieinander sind und sich abstoßen.

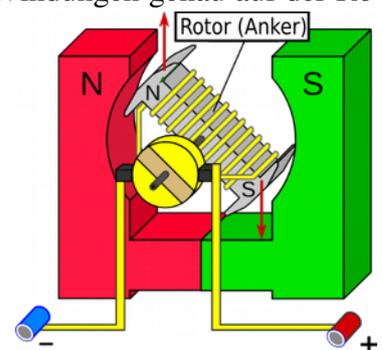


Fig. 147

### 3.5 Magnetfeld einer Spule – Magnetische Permeabilität

#### 3.5.1 Magnetfeld einer Spule

##### Versuch 14 - Magnetfeld einer Spule

Ein kleiner Dauermagnet hängt an einem Federkraftmesser über einer Spule (siehe Fig. 148). Wenn kein Strom durch die Spule fließt, dann zeigt der Kraftmesser die Gewichtskraft des Magneten an, welche  $0,195\text{ N}$  beträgt.

Wenn der Strom eingeschaltet wird, dann entsteht ein Magnetfeld und je nach Stromrichtung wird der Magnet entweder angezogen oder abgestoßen. Die Messung ist einfacher, wenn der Magnet angezogen wird.

Mit dem Kraftmesser kann man den Betrag der Kraft messen mit der der Magnet angezogen wird. Der Versuch wird für verschiedene Stromwerte wiederholt, wobei darauf zu achten ist, dass die Endposition des Magneten immer die selbe ist.

Für eine Spule mit 1200 Windungen ergeben sich die Werte in Tab. 7. Daraus lässt sich das Diagramm von Fig. 149 zeichnen. Man sieht, dass die Messpunkte gut durch eine Ausgleichsgerade angenähert werden.

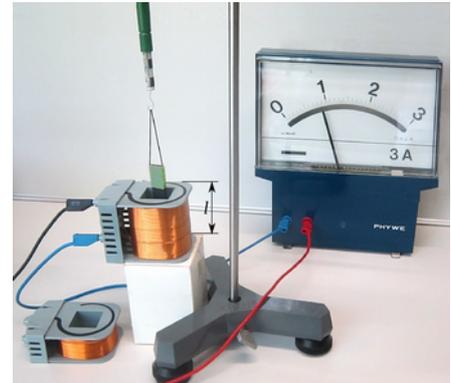


Fig. 148: Spule zieht den Magneten an

MP	$I$ [A]	$F_T$ [N]	$F_B$ [mN]
0	0	0,195	0,0
1	0,3	0,240	45,0
2	0,6	0,280	85,0
3	0,9	0,330	135,0
4	1,2	0,375	180,0
5	1,5	0,420	225,0

Tab. 7

Aus dem Versuch 14 ergibt sich, dass die Kraft, welche auf den Magneten wirkt proportional der Stromstärke ist

$$F \propto I$$

Andere ähnliche Versuche zeigen, dass für eine bestimmte Stromstärke die Kraft proportional der Windungszahl und umgekehrt proportional der Länge der Spule ist.

$$F \propto \frac{N}{l}$$

Nachdem, wie schon in Par. 3.2.3 dargestellt, das Magnetfeld proportional der Kraft ist, welchen im Feld auf ferromagnetische Körper wirkt, gilt auch für das Magnetfeld in der Spule  $B \propto F$  und folglich  $B \propto I \cdot \frac{N}{l}$

$$B \propto I \cdot \frac{N}{l}$$

Wenn man in das Innere der Spule von Versuch 14 einen Eisenklotz gibt, dann sieht man, dass die Kraft um ein Vielfaches größer wird. Das zeigt deutlich, dass das Material welches sich innerhalb und in der Umgebung der Spule befindet die Intensität des Magnetfeldes wesentlich beeinflusst. Dieser Umstand wird durch einen geeigneten Koeffizienten, nämlich durch die magnetische **Permeabilität**  $\mu$  berücksichtigt.

Die Formel für die Berechnung des Magnetfeldes im Inneren einer Spule mit  $N$  Windungen, in der der Strom  $I$  fließt, und die eine Länge  $l$  hat, lautet:  $B = \mu \cdot I \cdot \frac{N}{l}$

Genau genommen gilt diese Formel nur, wenn die Länge der Spule ein Vielfaches des Spulendurchmessers ist. Andernfalls werden Korrekturfaktoren benötigt.

Die Bedeutung der magnetischen Permeabilität  $\mu$  wird im folgenden Paragraphen erklärt.

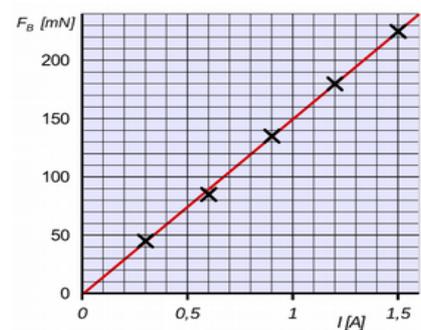


Fig. 149

### 3.5.2 Magnetische Permeabilität

Die magnetische Permeabilität  $\mu$  kennzeichnet den Einfluss eines Materials auf das Magnetfeld. Er gibt auch an, wie stark ein Material magnetisiert wird.

Die **absolute Permeabilität**  $\mu$  besteht aus zwei Koeffizienten  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

$\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ Tm/A} = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$  ist die **magnetische Feldkonstante**. Sie ist gleich der absoluten Permeabilität im Vakuum.

$\mu_r$  ist die **relative Permeabilität** oder **Permeabilitätszahl**. Sie gibt an, wie groß das Magnetfeld in einem bestimmten Material im Vergleich zum Vakuum ist. Die relative Permeabilität ist eine reine Zahl ohne Maßeinheit. Für einige Materialien ist ihr Wert in Tab. 8 angegeben.

Materialien können anhand ihrer magnetischen Permeabilität klassifiziert werden. Sie sind **diamagnetisch**, wenn die Permeabilitätszahl ein wenig kleiner als 1 ist und **paramagnetisch** wenn sie ein wenig größer als 1 ist. Bei den **diamagnetischen** und den paramagnetischen Stoffen ist die Permeabilität konstant.

Bei den **ferromagnetischen** Materialien ist die Permeabilitätszahl sehr groß und nur diese Materialien beeinflussen das Magnetfeld in nennenswerter Weise. Im Gegensatz zu den anderen, ist bei diesen die Permeabilität jedoch nicht konstant, sondern sehr stark von der Intensität und der Frequenz des Feldes abhängig.

Permeabilitätszahl $\mu_r$		
Material	Art	$\mu_r$
Wasser	diamag.	0,9999920
Kupfer	diamag.	0,9999936
Wasserstoff	diamag.	1,0000000
Vakuum	neutral	1
Luft	paramag.	1,0000004
Aluminium	paramag.	1,0000022
Kobalt	ferromag.	80....200
Eisen	ferromag.	300....10.000
Ferrit	ferrimag.	4....15.000
Permalloy	ferromag.	8....100.000
Mu-metall	ferromag.	20.000....140.000

Tab. 8

#### Beispiel 32

Die Spule von Fig. 150 ist 11 cm lang und hat 440 Windungen. Sie wird von einem Strom mit  $I = 1,5 \text{ A}$  durchflossen. Die rechteckige Prüfspule hängt zwischen den Windungen der Zylinderspule. Sie hat 20 Windungen und ihre kurze Seite ist 6 cm lang.

- Wie groß ist das Magnetfeld im Inneren der Zylinderspule in Luft?
- Wie groß muss die Stromstärke in der Prüfspule sein, damit auf sie eine Kraft von 4 mN wirkt?

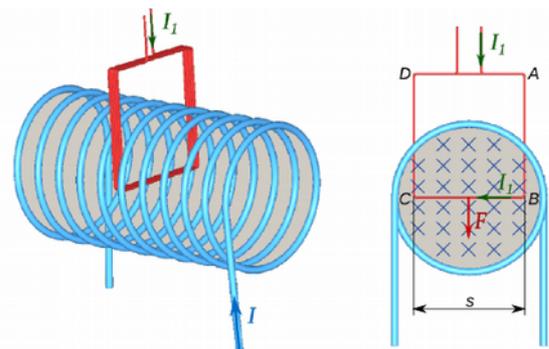


Fig. 150

**Lösung**  $N = 440$   $\mu_r = 1$   $l = 11 \text{ cm}$   $I = 1,5 \text{ A}$   $N_1 = 20$   $s = 6 \text{ cm}$   $F = 4 \text{ mN}$

$$a) \quad B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{N}{l} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 1 \cdot 1,5 \text{ A} \cdot \frac{440}{0,11 \text{ m}} = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 7,6 \text{ mT}$$

$$b) \quad I_1 = \frac{F}{N_1 \cdot B \cdot s} = \frac{4 \text{ mN}}{20 \cdot 7,6 \text{ mT} \cdot 0,06 \text{ m}} = 0,44 \text{ A} = 440 \text{ mA}$$

### 3.6 Kraft auf bewegte Ladungen - Lorentzkraft

In Paragraph 3.2.4 wurde gezeigt, dass auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld die Kraft  $F = B \cdot I \cdot s$  wirkt, wenn der Leiter senkrecht zu den Feldlinien gerichtet ist.

Die Stromstärke hängt von der Ladungsmenge  $Q$  ab, welche den Leiterquerschnitt durchströmt.

$$I = \frac{Q}{t}$$

Wenn sich die Ladungen mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen, dann ist die Zeit die sie brauchen um die Strecke  $s$  zurückzulegen gleich  $t = \frac{s}{v}$  und die Ladungsmenge, welche

sich im Feld befindet beträgt  $Q = I \cdot t = \frac{I \cdot s}{v} \rightarrow I = \frac{Q \cdot v}{s}$

Folglich erhält man für die Kraft  $F = B \cdot \frac{Q \cdot v}{s} \cdot s \rightarrow F = B \cdot Q \cdot v$

Die Formel gilt, wenn die Geschwindigkeit senkrecht zu den Feldlinien gerichtet ist.

Die Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld bezeichnet man als **Lorentzkraft** zu Ehren des Physikers Hendrik Lorentz <sup>(20)</sup>

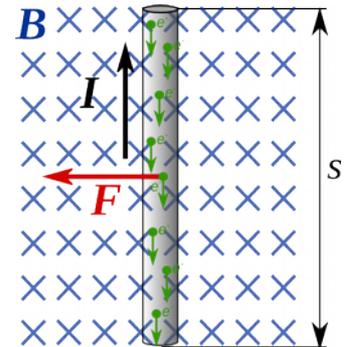
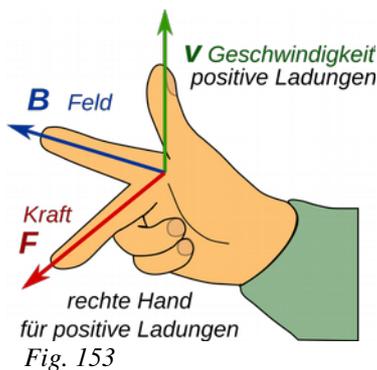


Fig. 151



Wenn die sich bewegenden Ladungen positiv sind, dann gilt die Drei-Finger-Regel der **rechten** Hand (siehe Fig. 153).

Wenn die Ladungen negativ sind (z.B. Elektronen), dann muss man die Drei-Finger-Regel der **linken** Hand anwenden (Fig. 152) oder die Bewegungsrichtung umkehren.

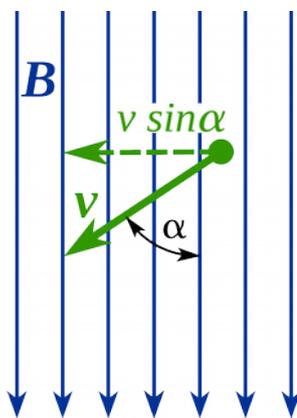
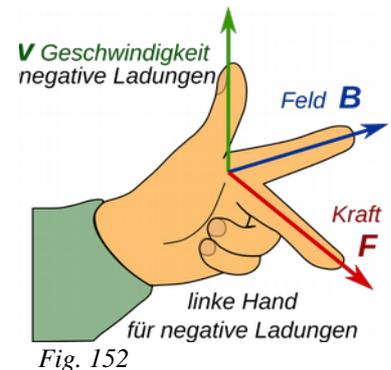


Fig. 154

Wenn die Richtung der Geschwindigkeit nicht senkrecht zu den Feldlinien ist, dann darf man nur die senkrechte Komponente in die Berechnung einbeziehen.

$$F = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin \alpha$$

Wenn sich eine Ladung parallel zu den Feldlinien bewegt ( $\alpha = 0^\circ$  oder  $\alpha = 180^\circ$ ), dann ist die Kraft Null und die Ladung setzt ihre Bewegung ohne Beschleunigung fort.

Wenn die Geschwindigkeit einer Ladung stets senkrecht zu den Feldlinien gerichtet ist, dann wird die Bahn kreisbogenförmig, wenn sie schräg zu den Feldlinien ist, entsteht eine Spirale.

<sup>20</sup> Hendrik Antoon **Lorentz** (1853-1928) war ein holländischer theoretische Physiker, der zusammen mit Pieter Zeeman, den Nobel-Preis für die Elektronen-Theorie erhielt, welche zum Ausgangspunkt für Albert Einsteins Relativitätstheorie wurde.

### 3.6.1 Ablenkung einer bewegten Ladung im Magnetfeld

Wenn sich eine elektrische Ladung in einem Magnetfeld senkrecht zu den Feldlinien bewegt, dann wirkt auf die Ladung die Lorentzkraft, welche senkrecht zum Feld und zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Im Kapitel über die Zentralkraft wurde gezeigt, dass eine senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtete Kraft eine Zentralbeschleunigung erzeugt und folglich eine kreisbogenförmige Bahn entsteht.

Fig. 155 zeigt die Situation für ein Elektron, das mit der Geschwindigkeit  $v$  senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld  $B$  eindringt. Die Ladung ist gleich der Elementarladung  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Die Lorentzkraft wird zur Zentralkraft.

$$F_L = F_Z \quad \rightarrow \quad B \cdot e \cdot v = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Daraus folgt, dass innerhalb des Feldes die Elektronenbahn kreisbogenförmig ist, mit Radius:

$$r = \frac{m \cdot v}{B \cdot e} \quad \text{Im Allgemeinen wird für ein Teilchen mit Ladung } Q \text{ der Radius } r = \frac{m \cdot v}{B \cdot Q}$$

Die Richtung der Krümmung ergibt sich aus den oben gezeigten Drei-Finger-Regeln.

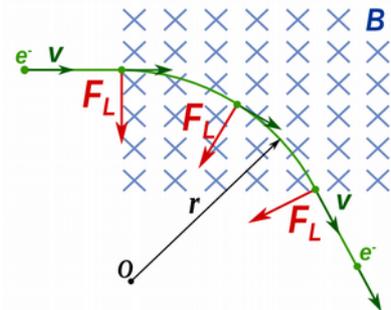


Fig. 155: Elektron in einem Magnetfeld

### 3.6.2 Kathodenstrahlröhre

Eine Kathodenstrahlröhre oder Elektronenstrahlröhre ist eine evakuierte Glasröhre, in welcher ein Elektronenstrahl erzeugt wird.

Bis zur Einführung von Flachbildschirmen (LCD oder LED) wurden Kathodenstrahlröhren in Messgeräten (z.B. Oszilloskop und Radar) und in Fernsehgeräten verwendet.

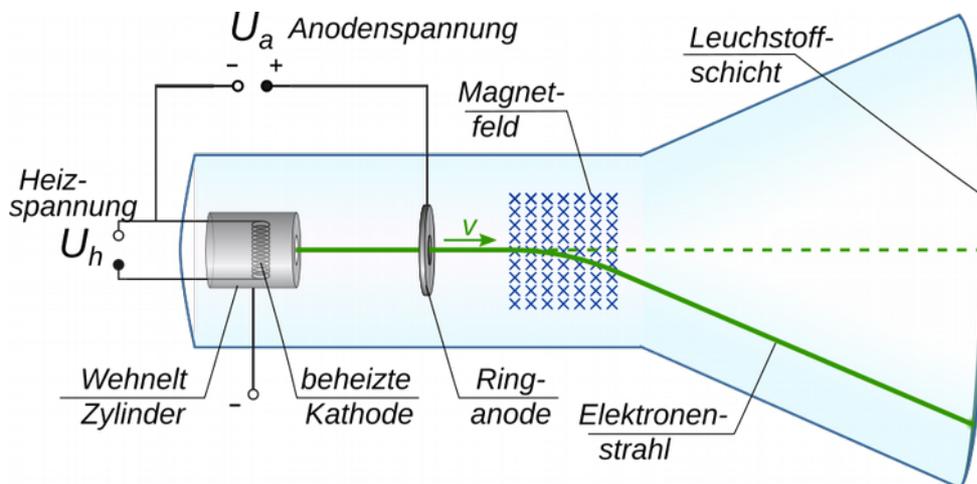


Fig. 156: Einfaches Schema einer Kathodenstrahlröhre

Ein vereinfachtes Funktionsprinzip ist in Fig. 156 dargestellt. Durch die Heizspannung  $U_h$  wird der Glühfaden der Kathode (negativer Pol) erhitzt. Dadurch springen Elektronen aus dem Metallgitter. Sie werden durch das elektrische Feld der Beschleunigungsspannung  $U_a$  zwischen der Kathode und der Ringanode (positiver Pol) beschleunigt. Um die Elektronen zu einem Strahl zu bündeln ist die Kathode von einer zylinderförmigen negativen Elektrode umgeben (Wehnelt-Zylinder). Zwischen der Kathode und der Ringanode werden die Elektronen durch ein elektrisches Feld beschleunigt. Die gesamte elektrische Energie wird in kinetische Energie der Elektronen umgewandelt.

### 3 Elektromagnetische Kraft

Allgemein gilt  $U = \frac{E_{el}}{Q}$ . Für Elektronen welche durch die Spannung  $U_a$  beschleunigt

werden  $E_{el} = U_a \cdot e$

$$E_{kin} = E_{el} \rightarrow \frac{m_e \cdot v^2}{2} = U_a \cdot e \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot U_a \cdot e}{m_e}}$$

Wenn z.B. die Beschleunigungsspannung  $U_a = 400 \text{ V}$  beträgt, dann erreichen die Elektronen

$$(m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \text{ eine Geschwindigkeit } v = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 11,9 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit der Elektronen wird so groß, dass sie die Bohrung in der Mitte der Anode durchdringen und auf den Bildschirm auftreffen, wo sie einen Lichtfleck erzeugen.

In der Kathodenstrahlröhre von Fig. 157 sind zwischen der Anode und dem Bildschirm außerhalb der Röhre Spulen angebracht, welche ein Magnetfeld erzeugen, wodurch der Elektronenstrahl abgelenkt werden kann.

Die gesamte Ablenkung welche auf dem Bildschirm sichtbar wird, hängt von der Geschwindigkeit der Elektronen, dem Magnetfeld und den Abmessungen der Röhre ab.

Während der Bewegung im Feld wirkt auf die Elektronen die Lorentzkraft, welche zur Zentralkraft wird. Deshalb beschreiben die Elektronen einen Kreisbogen. Bezugnehmend auf die Maße von Fig. 158 ergibt sich:

$$F_Z = F_L \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = B \cdot e \cdot v$$

$$r = \frac{m \cdot v}{B \cdot e} = \frac{m}{B \cdot e} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot e}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m}{e \cdot B^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{x_1}{r} \rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x_1}{r}\right)$$

$$y_1 = r \cdot (1 - \cos \alpha) \quad y_2 = x_2 \cdot \tan \alpha$$

Die gesamte Ablenkung ist dann  $y = y_1 + y_2$

#### Beispiel 33

Die Röhre von Fig. 157 hat die Maße  $x_1 = 3,0 \text{ cm}$  und  $x_2 = 35,0 \text{ cm}$ . Die Spulen an der Seite, oberhalb und unterhalb der Röhre haben eine Länge von  $6,0 \text{ cm}$  und  $600$  Windungen.

Wie groß ist die gesamte Ablenkung, bei einer Beschleunigungsspannung von  $320 \text{ V}$  und einem Strom in den seitlichen Spulen von  $30 \text{ mA}$ .

**Lösung**  $N = 600 \quad l = 6 \text{ cm} \quad I = 0,03 \text{ A} \quad U = 320 \text{ V} \quad x_1 = 3,0 \text{ cm} \quad x_2 = 35,0 \text{ cm}$

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{N}{l} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 1 \cdot 0,03 \text{ A} \cdot \frac{600}{0,06 \text{ m}} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 0,38 \text{ mT}$$

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m}{e \cdot B^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 320 \text{ V} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (0,38 \cdot 10^{-3} \text{ T})^2}} = 0,159 \text{ m} \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x_1}{r}\right) = 10,8^\circ$$

$$y_1 = r \cdot (1 - \cos \alpha) = 0,28 \text{ cm} \quad y_2 = x_2 \cdot \tan \alpha = 6,68 \text{ cm} \quad y = y_1 + y_2 = 6,96 \text{ cm}$$

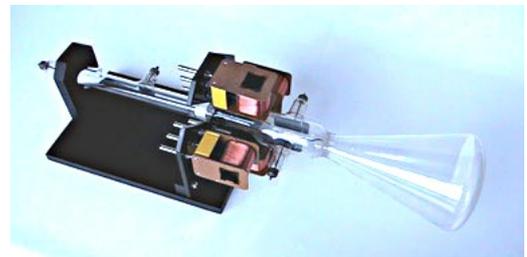
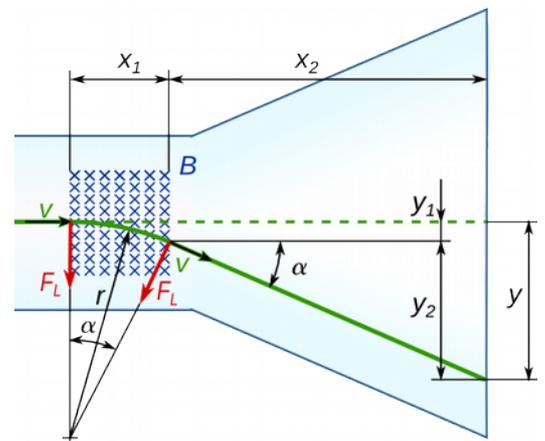


Fig. 157 Kathodenstrahlröhre für Versuche  
Fig. 158



### 3.7 Beispiele

#### Beispiel 34

In einem Magnetfeld von  $3,2 \text{ mT}$  wird ein Elektronenstrahl erzeugt, der senkrecht zu den Feldlinien gerichtet ist. Es entsteht eine kreisförmige Elektronenbahn, mit einem Radius von  $2 \text{ cm}$  (Fig. 159).

- Wie groß ist die Geschwindigkeit der Elektronen?
- Wie groß ist die Spannung, welche die Elektronen beschleunigt?

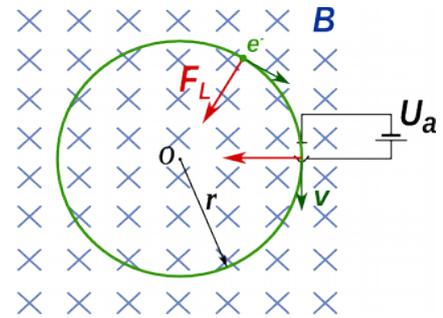


Fig. 159

Lösung  $Q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$       $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$B = 3,2 \text{ mT}$       $r = 2 \text{ cm}$

- a) Die Lorentzkraft wird zur Zentralkraft

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot B \cdot v \quad \rightarrow \quad v = \frac{r \cdot e \cdot B}{m} = \frac{0,02 \text{ m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 1,13 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Die elektrische Energie wird zur Bewegungsenergie

$$U_a \cdot e = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \rightarrow \quad U = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1,13 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 360 \text{ V}$$

#### 3.7.1 Aufgaben

- Ein rechteckige Spule ähnlich der von Fig. 127 ( $d = 10 \text{ cm}$ ,  $s = 12 \text{ cm}$ ) mit 40 Windungen befindet sich in einem Magnetfeld von  $0,25 \text{ T}$ .

Wie groß ist die Stromstärke in der Spule, wenn auf die Spule eine Drehmoment von  $0,24 \text{ Nm}$  wirkt, wenn die Achse der Spule senkrecht zu den Feldlinien ist?

- In der Nähe des Äquators, wo das Erdfeld  $30 \mu\text{T}$  beträgt, befindet sich ein Kompass in einer  $6 \text{ mm}$  langen Spule mit 7 Windungen (siehe Fig. 160). Ohne Strom ist die Kompassnadel senkrecht zur Spulenachse.

Wie groß muss die Stromstärke in der Spule sein, damit die Nadel  $45^\circ$  abgelenkt wird?

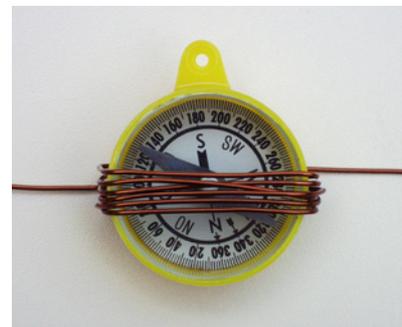


Fig. 160

- Ein Alfa-Teilchen ( Wasserstoffion  $\text{He}^{2+}$   $Q = 2e = +3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ) wird in ein Magnetfeld mit  $B = 50 \text{ mT}$  geschossen. Im Feld beschreibt das Teilchen einen Kreisbogen mit einem Radius von  $12 \text{ cm}$ .

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Teilchens ?

#### Antworten

- Die Stromstärke beträgt  $2 \text{ A}$ .
- Wenn die Nadel um  $45^\circ$  abgelenkt wird, dann ist das Feld der Spule gleich groß wie das Erdfeld. Deshalb muss die Stromstärke in der Spule  $0,20 \text{ A}$  betragen.
- Die Geschwindigkeit beträgt  $291 \text{ km/s}$ .

## 4 Elektromagnetische Induktion

### 4.1 Induktion in bewegten Leitern

#### Versuch 15 - Bewegte Leiterschaukel

An die Leiterschaukel von Versuch 5 aus Kapitel 3 wird anstatt einer Spannungsquelle und einem Amperemeter ein sehr sensibles Voltmeter angeschlossen (Fig. 161).

Wenn man das Alu-Röhrchen nach rechts oder links bewegt, dann sieht man, dass das Voltmeter eine Spannung anzeigt.

Die in Versuch 15 auftretende Spannung lässt sich leicht durch die Lorentzkraft erklären (siehe Par. 3.6).

Wenn ein Leiter sich in einem Magnetfeld bewegt, dann werden auch die darin befindlichen Ladungen mitbewegt. Wenn sich die Ladungen senkrecht zu den Feldlinien bewegen, dann wirkt auf sie die Lorentzkraft  $F_L = B \cdot Q \cdot v$ .

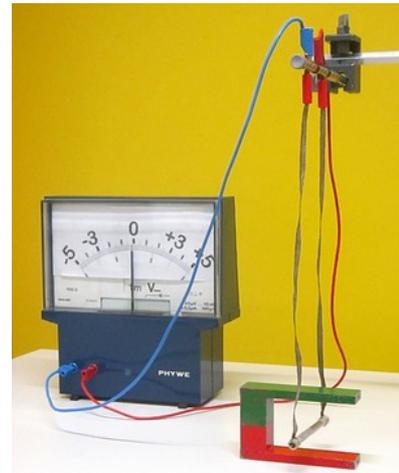


Fig. 161 Leiterschaukel

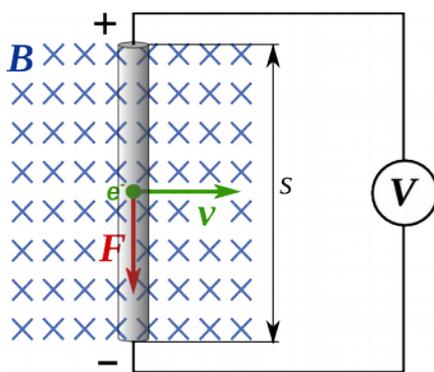


Fig. 162

Die Situation ist in Fig. 162 dargestellt. Wenn man die Bewegung der Elektronen betrachtet, dann muss man die Drei-Finger-Regel der linken Hand anwenden. Wenn das Röhrchen nach rechts bewegt wird, dann werden die Elektronen von der Lorentzkraft nach unten gedrückt. Folglich wird das untere Ende des Röhrchens zum negativen Pol und wegen des Elektronenmangels wird das obere Ende zum positiven Pol.

Um die Elektronen von oben nach unten zu verschieben, muss Arbeit verrichtet werden. Für die gesamte Ladung  $Q$  ist diese Arbeit  $W = F_L \cdot s = E_{el} = B \cdot Q \cdot v \cdot s$ .

Die verrichtete Arbeit erhöht die elektrische Energie der Ladung.

Allgemein gilt für die elektrische Spannung  $U = \frac{E_{el}}{Q}$

Für das bewegte Röhrchen folgt  $U = \frac{B \cdot Q \cdot v \cdot s}{Q} = B \cdot v \cdot s$

Allgemein gilt dass, wenn ein Leiter mit Länge  $s$  sich senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfelds  $B$  bewegt, zwischen den Enden des Leiters die Spannung  $U = B \cdot v \cdot s$  entsteht.

Wenn die Bewegung des Leiters in eine Richtung erfolgt, welche mit den Feldlinien den Winkel  $\alpha$  einschließt (Fig. 163), dann ist die induzierte Spannung  $U = B \cdot v \cdot s \cdot \sin \alpha$ .

Es ergibt sich daraus, dass nur dann eine Spannung induziert wird, wenn der Leiter bei seiner Bewegung Feldlinien "schneidet".

Wenn sich eine Spule mit  $N$  Windungen im Feld bewegt, dann addieren sich die Spannungen, welche in den einzelnen Leiterstücken entstehen und die gesamte Spannung bei einer Bewegung senkrecht zu den Feldlinien wird  $U = N \cdot B \cdot v \cdot s$ .

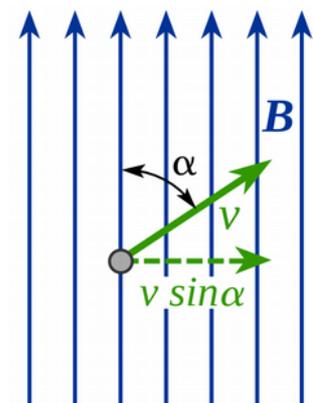


Fig. 163

### 4.1.1 Induktion in einer rotierenden Leiterschleife

Wenn eine rechteckige Leiterschleife sich in einem Magnetfeld dreht, und dabei die Drehachse senkrecht zu den Feldlinien ist (siehe Fig. 164), dann schneiden die Seiten AB und CD Feldlinien. Bei einer Drehfrequenz  $f$  ist die Geschwindigkeit der Seiten  $v = d \cdot \pi \cdot f$ .

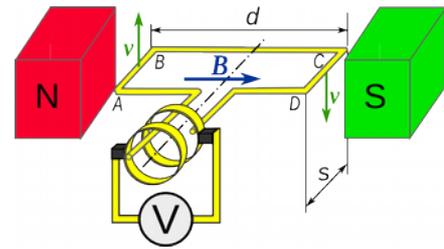


Fig. 164

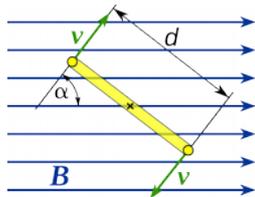


Fig. 165

Während der Bewegung ändert sich dauernd der Winkel  $\alpha$  zwischen den Feldlinien und der Bewegungsrichtung (siehe Fig. 165).

In den Seiten AB und CD werden Spannungen induziert die sich addieren. Die Richtung der Geschwindigkeit in AB und CD ist zwar entgegengesetzt, aber innerhalb der Leiterschleife werden die Ladungen zum gleichen Ende hin verschoben. Die induzierte Momentanspannung wird somit

$$U = 2 \cdot B \cdot v \cdot s \cdot \sin \alpha = 2 \cdot B \cdot d \cdot \pi \cdot f \cdot s \cdot \sin \alpha$$

In einer rechteckigen Leiterschleife, welche in einem homogenen Magnetfeld rotiert, wird eine Wechselspannung induziert. Ihr Wert ändert sich dauernd zwischen einem positiven und einem negativen Maximum  $U_{max} = 2 \cdot B \cdot d \cdot \pi \cdot f \cdot s$

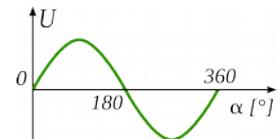


Fig. 166

### 4.1.2 Erzeugung einer Gleichspannung - Kommutator

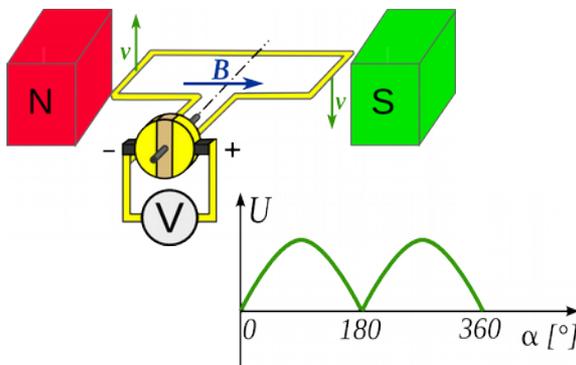


Fig. 167

Oben ist gezeigt worden, dass in einer rotierenden Leiterschleife eine Wechselspannung induziert wird. Nach jeder halben Umdrehung ändert sich die Polung (Fig. 166).

Wenn man eine Gleichspannung erzeugen will, dann verwendet man anstatt der beiden getrennten Kollektoringe einen einzigen geteilten Ring (Kommutator), so wie er beim Gleichstrommotor verwendet wird.

Dadurch entsteht eine Spannung, die stets in die selbe Richtung wirkt. Sie ist aber nicht konstant sondern sie pulsiert zwischen Null und dem Maximalwert (Fig. 167).

Um eine etwas konstantere Gleichspannung zu erzeugen teilt man den Kollektoring mehrmals, wie Fig. 168 zeigt. Die erzeugte Spannung wird um so gleichmäßiger, je öfter der Kollektor geteilt ist.

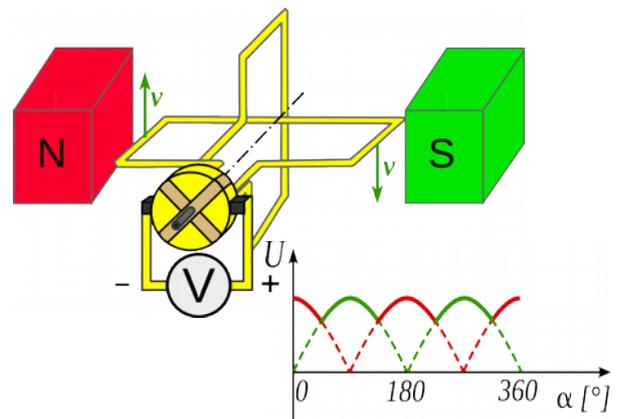


Fig. 168

## 4.2 Elektromagnetische Induktion und magnetischer Fluss

### Versuch 16 - Beispiele von elektromagnetischer Induktion

In Fig. 169 sind vier Versuche dargestellt, bei denen in einer Spule eine Spannung mit Hilfe eines Dauermagneten induziert wird. In Versuch a) wird der Magnet an die Spule angenähert und von dieser entfernt, in Versuch b) wird die Spule an den Magneten angenähert und wieder entfernt. In Versuch c) rotiert der Magnet vor der Spule und in Versuch d) dreht sich die Spule über dem Magneten. Bei all diesen Versuchen ist Bewegung die Ursache der Induktion.

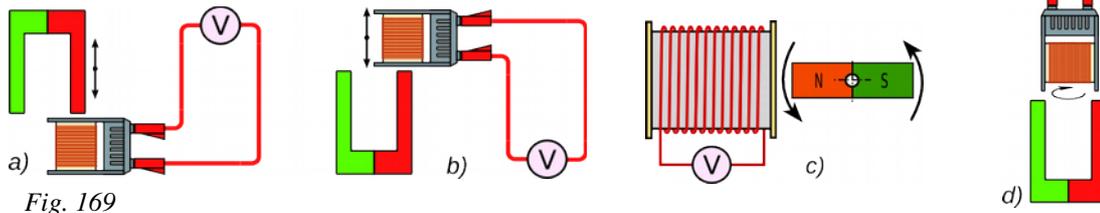


Fig. 169

Weitere Versuche sind in Fig. 170 und Fig. 171 dargestellt. Auf einem gemeinsamen Eisenkern befinden sich zwei Spulen. Die linke Spule (Feldspule) ist an eine regelbare Spannungsquelle angeschlossen, welche einen Strom erzeugt, der seinerseits ein Magnetfeld hervorruft. An die rechte Spule (Induktionsspule), ist ein Voltmeter angeschlossen, welches die induzierte Spannung anzeigt. Man stellt fest, dass eine Spannung induziert wird wenn a) der Strom in der Feldspule, und folglich das erzeugte Magnetfeld, sich ändert und b) wenn man das Joch des Eisenkerns annähert oder entfernt.

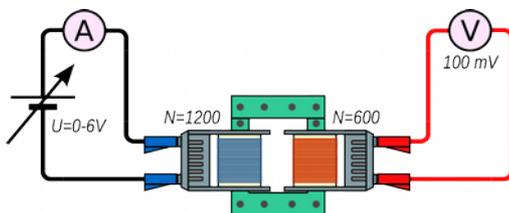


Fig. 171

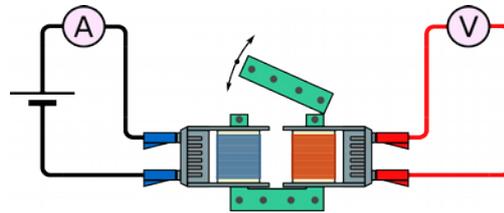


Fig. 170

Aus den oben gezeigten Versuchen ergibt sich, dass Induktion auftritt wenn

- Magnet und Spule sich nähern oder entfernen
- eine Spule in einem Magnetfeld rotiert oder eine Magnet vor einer Spule rotiert
- eine Spule sich auf einem Eisenkern befindet, in dem sich das Magnetfeld ändert

Man kann daraus schließen, dass in einer Spule, auch mit nur einer Windung, eine Spannung induziert wird, wenn sich die Anzahl der Feldlinien ändert, welche die Spule durchdringen (siehe Fig. 172). Das ist der Fall, wenn sich entweder die Intensität des Magnetfeldes  $B$ , oder die senkrecht zum Feld stehende Fläche  $A_0$  der Spule ändert.

Die physikalische Größe, welche eine Maß für die Anzahl der Feldlinien darstellt, welche eine zum Feld senkrechte Fläche  $A_0$  durchdringen, heißt **magnetischer Fluss** mit dem Formelzeichen  $\phi$ .

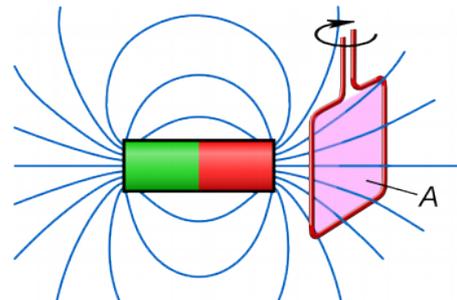


Fig. 172

### 4.2.1 Magnetischer Fluss - Induktionsgesetz

Der magnetische Fluss  $\phi$ , welcher eine Fläche  $A_0$  durchdringt ist proportional dem Magnetfeld  $B$  und der Größe der Fläche. Es gilt  $\Phi = B \cdot A_0$ , wobei  $A_0$  die zum Feld senkrechte Fläche ist.

Die Maßeinheit des magnetischen Flusses ist  $[\Phi] = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2 = 1 \text{ Wb}$  (Weber) benannt nach dem Physiker W. E. Weber <sup>(21)</sup>

Aus der obigen Formel erhält man für das Magnetfeld  $B = \frac{\Phi}{A_0}$ .

Das erklärt, warum in vielen Elektrotechnik Büchern das Magnetfeld  $B$  als magnetische Flussdichte bezeichnet wird. Mit Hilfe der neu eingeführten Größe kann man ein allgemeines Induktionsgesetz formulieren.

Wenn sich der magnetische Fluss in einer Leiterschleife in der Zeitspanne  $\Delta t$  um  $\Delta\phi$  ändert, dann wird eine Spannung  $U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  induziert. Wenn die Änderung des Flusses in einer

Spule mit  $N$  Windungen erfolgt, dann ist die induzierte Spannung  $U = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

Dieses Gesetz heißt auch **Gesetz von Faraday** nach dem Naturwissenschaftler M. Faraday <sup>(22)</sup> welcher die magnetische Induktion mit Versuchen, ähnlich dem folgenden, untersuchte.

#### Versuch 17 - Versuch von Faraday

Nach der Entdeckung Oersteds über die Erzeugung von Magnetismus durch elektrischen Strom (siehe Par. 3.2.1) versuchte Faraday das Experiment umzukehren, d.h. er wollte herausfinden ob es möglich war elektrischen Strom durch Magnetismus zu erzeugen. Es gelang ihm mit einem Versuch ähnlich dem von Fig. 173.

Ein auf einer Seite eines ringförmigen Eisenkerns aufgewickelter Draht bildet die Spule 1. Sie kann über einen Schalter an eine Batterie angeschlossen werden. Auch auf der anderen Seite des Eisenkerns ist ein Draht aufgewickelt, der die Spule 2 bildet. Die Enden des Drahtes sind verbunden, so dass ein geschlossener Stromkreis entsteht. Ein Teil des Drahtes ist über einen Kompass gewickelt, und zwar so, dass die Windungen parallel zur Magnetnadel sind.

Wenn man den Strom in Spule 1 einschaltet, dann wird sie zur Feldspule und das Magnetfeld im Eisenkern nimmt zu. Folglich erhöht sich das Feld auch in Spule 2, der Induktionsspule, in welcher deshalb eine Spannung induziert wird. Diese Spannung erzeugt einen Strom in der Spule 2 wodurch auch in den um den Kompass gewickelten Windungen ein Magnetfeld entsteht. Folglich bewegt sich die Kompassnadel.

Wenn man dann den Schalter öffnet, nimmt der Strom in Spule 1 und folglich das Magnetfeld, ab. Dadurch entsteht eine Induktionsspannung in die andere Richtung, welche einen Strom in Spule 2 hervorruft. Letzterer erzeugt wiederum ein Magnetfeld rund um den Kompass das zu einem Ausschlag der Nadel in die entgegengesetzte Richtung führt.

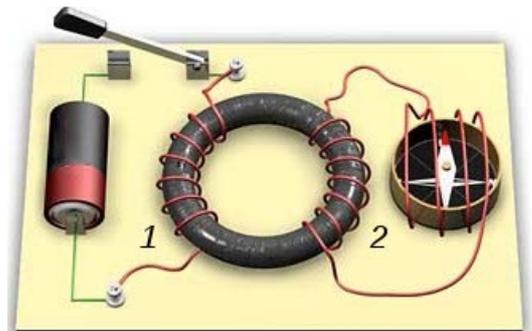


Fig. 173: Versuch von Faraday

21 Wilhelm Eduard **Weber** (1804-1891) war ein deutscher Physiker, der sich unter anderem mit Akustik und Elektromagnetismus befasste. Zusammen mit C. F. Gauss erfand er einen neuartigen Telegrafen.

22 Michael **Faraday** (1791-1867) war ein englischer Experimentalwissenschaftler, welcher einen wichtigen Beitrag zum Fortschritt im Bereich der Elektrochemie und des Elektromagnetismus leistete. Unter anderem entdeckte er im Jahr 1831 die elektromagnetische Induktion.

Beispiel 35

Eine Leiterschleife wie jene in Fig. 174 mit  $a = 4,5 \text{ cm}$  und  $b = 5,0 \text{ cm}$  wird in einer Zeit von  $0,5 \text{ s}$  in ein Magnetfeld von  $20 \text{ mT}$  geschoben.

Wie groß ist die induzierte Spannung ?

Lösung

$$B = 20 \text{ mT} \quad a = 4,5 \text{ cm} \quad b = 5,0 \text{ cm} \quad t = 0,5 \text{ s}$$

$$A = a \cdot b = 4,5 \text{ cm} \cdot 5,0 \text{ cm} = 22,5 \text{ cm}^2$$

Während des Einschlebens ändert sich die Fläche, welche von Feldlinien durchdrungen wird von  $0$  auf die gesamte Fläche  $A$ .

$$\rightarrow \Delta A_0 = A = 22,5 \text{ cm}^2$$

Da das Feld konstant ist ergibt sich

$$\rightarrow \Delta \Phi = B \cdot \Delta A_0 = 20 \text{ mT} \cdot 22,5 \text{ cm}^2 = 0,45 \text{ T} \cdot \text{cm}^2 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

und die induzierte Spannung ist 
$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot \text{m}^2}{0,5 \text{ s}} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 90 \mu\text{V}$$

Das selbe Ergebnis erhält man auch, wenn man die Induktion im unteren waagrechten Leiterstück der Schleife betrachtet. Es wird nur in diesem Leiterstück eine Spannung induziert, da es das einzige ist, welches Feldlinien schneidet. Für ein Leiterstück mit der Länge  $a$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $v$  senkrecht zu den Feldlinien bewegt gilt:

$$U = B \cdot b \cdot v = B \cdot b \cdot \frac{a}{\Delta t} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot \frac{0,045 \text{ m}}{0,5 \text{ s}} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 90 \mu\text{V}$$

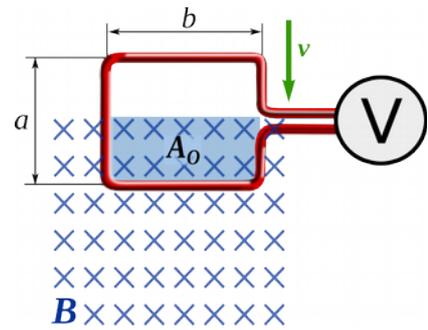


Fig. 174

Beispiel 36

Zwei  $6,0 \text{ cm}$  lange Spulen befinden sich auf einem geschlossenen Eisenkern mit einer Querschnittsfläche von  $9 \text{ cm}^2$ . Die relative Permeabilität beträgt  $75$ .

Die erste Spule hat  $1200$  Windungen und ist an eine Spannungsquelle angeschlossen. An die zweite Spule ist ein Voltmeter angeschlossen. Der Strom in der ersten Spule wird in der Zeit von  $0,5 \text{ s}$  von  $0,6 \text{ A}$  auf  $1,2 \text{ A}$  erhöht.

Wie viele Windungen muss die zweite Spule haben, damit in ihr eine Induktionsspannung von  $100 \text{ mV}$  entsteht?

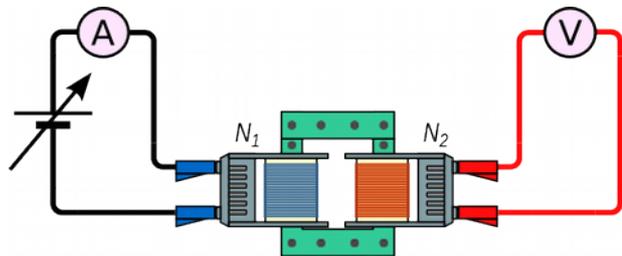


Fig. 175

Lösung

$$l = 6 \text{ cm} \quad \mu_r = 1200 \quad N_1 = 900 \quad \Delta I = 1,2 \text{ A} - 0,4 \text{ A} = 0,8 \text{ A} \quad t = 0,5 \text{ s} \quad V = 100 \text{ mV}$$

In der Zeit  $\Delta t$  erzeugt die erste Spule eine Änderung des Feldes von

$$\Delta B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \Delta I \cdot \frac{N_1}{l} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 75 \cdot 0,8 \text{ A} \cdot \frac{1200}{0,06 \text{ m}} = 1,5 \text{ T}$$

$$\Delta \Phi = \Delta B \cdot A_0 = 1,5 \text{ T} \cdot 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}^2 \quad U = N_2 \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$$N_2 = \frac{U \cdot \Delta t}{\Delta \Phi} = \frac{0,1 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ s}}{1,36 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}^2} = 37 \text{ Windungen}$$

### 4.3 Induktion und Energie

#### Versuch 18 - Pendelnder Magnet

Ein Hufeisenmagnet wird an zwei Schnüren aufgehängt, so dass er in einer Spule pendeln kann (siehe Fig. 176).

Zuerst wird an die Spule ein Voltmeter angeschlossen. Wenn man den Magneten kurz anschiebt, dann pendelt er mehrmals hin und her und das Voltmeter zeigt eine Spannung an.

Wenn man die Anschlüsse der Spule mit einem Leiter verbindet, und den Magneten wieder anschiebt, dann bleibt er gleich stehen ohne zu pendeln. Er wird offensichtlich gebremst.

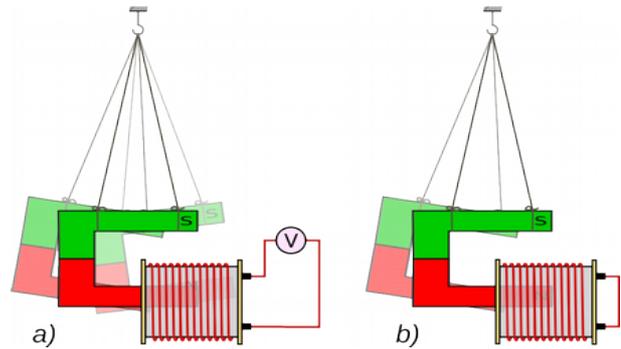


Fig. 176

Die Ergebnisse von Versuch 18 lassen sich durch das Induktionsgesetz für bewegte Leiter und durch das Gesetz betreffend die Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld erklären.

Wenn eine Leiter sich im Magnetfeld bewegt, dann wird eine Spannung induziert  $U = B \cdot v \cdot s$

Wenn an den Leiter ein Voltmeter angeschlossen ist (siehe Fig. 162 in S. 51), dann zeigt dieses die induzierte Spannung an, aber es fließt kein Strom, weil das Voltmeter einen sehr großen Widerstand hat.

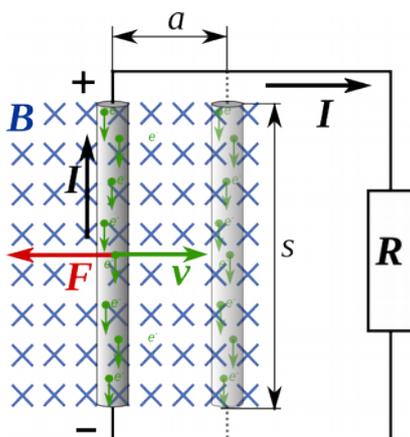


Fig. 177

Wenn an den bewegten Leiter ein Widerstand  $R$  angeschlossen wird, dann ist der Stromkreis geschlossen und es fließt ein Strom  $I = \frac{U}{R}$ . Aus dem Strom wirkt im Magnetfeld die Kraft  $F = B \cdot I \cdot s$ .

Wegen der Drei-Finger-Regel (Fig. 178) wirkt die Kraft nach links, der Bewegungsrichtung entgegen. Die Kraft bremst also die Bewegung.

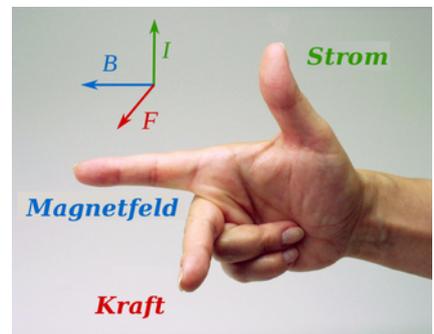


Fig. 178 Drei-Finger-Regel

Um den Leiter eine Strecke  $a$  zu bewegen, muss Arbeit verrichtet werden  $W = F \cdot a = B \cdot I \cdot s \cdot a$ . Die Zeit die erforderlich ist um die Strecke  $a$  zurückzulegen beträgt  $t = \frac{a}{v}$

Die in der Zeit  $t$  aufgewandte elektrische Energie ist  $E_{el} = U \cdot I \cdot t = B \cdot v \cdot s \cdot I \cdot \frac{a}{v} = B \cdot s \cdot I \cdot a$

Es zeigt sich also, dass die im Widerstand umgewandelte elektrische Energie gleich der verrichteten mechanischen Arbeit ist.  $W = E_{el}$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da auch in diesem Fall der Energieerhaltungssatz gilt. Wenn keine Reibung auftritt, dann muss die verrichtete mechanische Arbeit gleich der im Stromkreis umgewandelten elektrischen Energie sein.

### 4.3.1 Lenz'sches Gesetz

Die Ergebnisse von Versuch 18 können auch durch eine andere Überlegung erklärt werden.

Wenn sich ein Pol des Magneten der Spule nähert, dann wird eine Spannung induziert, weil sich der magnetische Fluss in der Spule ändert. Wenn der Spulenkreis geschlossen ist, dann erzeugt diese Spannung einen relativ großen Strom, welcher seinerseits ein Magnetfeld in der Spule erzeugt. Die Spule wird zum Elektromagneten.

Die Bewegung des sich nähernden Magneten wird nur dann gebremst, wenn auf der Seite von der sich der Magnet nähert das Feld der Spule den selben Pol aufweist, wie der Magnet. Dann stoßen sich die beiden Pole ab und der Magnet wird gebremst.

Der Strom der durch die induzierte Spannung hervorgerufen wird erzeugt also ein Feld, welches sich jenem des sich nähernden Magneten entgegenstellt und die Zunahme des Gesamtfeldes verringert.

Wenn sich der Magnet entfernt, dann entsteht der entgegen gesetzte Effekt. Der Strom erzeugt ein Magnetfeld das gleich gerichtet ist wie das des Magneten, so dass die Abnahme des Gesamtfeldes verringert wird. Im Allgemeinen kann festgehalten werden:

***Der durch die Induktionsspannung hervorgerufene Strom ist stets so gerichtet, dass seine Wirkung der Ursache der Induktion entgegen wirkt.***

Diese Regel nennt man **Lenz'sches Gesetz** <sup>(23)</sup>

Der folgende Versuch bestätigt die Gültigkeit des Gesetzes.

#### Versuch 19 - Lenz'sches Gesetz

Ein Alu-Ring wird an zwei Schnüren aufgehängt, so dass er frei pendeln kann. Der Ring hängt über einem Eisenkern, der sich in einer Spule befindet. Über einen Schalter kann die Spule an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen werden. (siehe Fig. 180).

Wenn man den Strom einschaltet, dann wird der Ring zunächst von der Spule abgestoßen, die Wirkung hält aber nicht an. Wenn man den Strom dann ausschaltet, wird der Ring kurz angezogen.

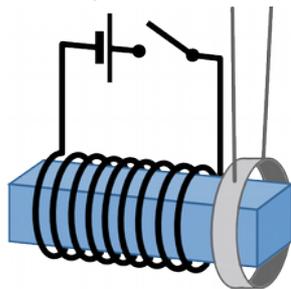


Fig. 180

Die Vorgänge kann man mit dem Lenz'schen Gesetz erklären.

Beim Einschalten vergrößert sich das Magnetfeld im Eisenkern. Die Induktion erzeugt einen Effekt der dem entgegen wirkt. Deshalb ist die Richtung des Induktionsstrom im Ring entgegengesetzt dem Strom in der Spule und Leiter mit entgegengesetzt gerichtetem Strom stoßen sich ab.

Nach kurzer Zeit stabilisiert sich der Strom in der Spule und das Magnetfeld im Kern ändert sich nicht mehr. Die Induktionsspannung, der Strom im Ring und die Kraft werden Null.

Wenn man dann den Strom ausschaltet, dann sinkt das Magnetfeld, und um dem entgegen zu wirken entsteht eine Induktionsspannung welche im Ring einen Strom erzeugt, der gleich gerichtet ist, wie der Strom in der Spule. Der Ring wird kurzzeitig von der Spule angezogen, weil sich Leiter mit gleich gerichtetem Strom anziehen. Die Wirkung endet, wenn der Spulenstrom auf Null gesunken ist.

Auch Versuch 18 und die Überlegungen von Seite 56 bestätigen das Lenz'sche Gesetz. Wenn die Richtung des induzierten Stromes umgekehrt wäre, dann würde die Kraft in Bewegungsrichtung wirken und die Bewegung unterstützen. Das würde aber ein "perpetuum mobile" ermöglichen.

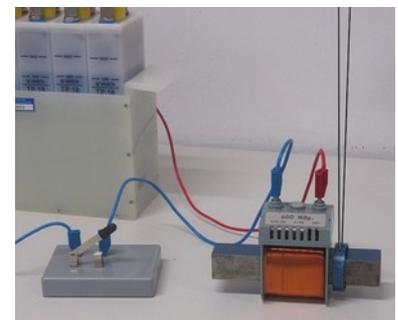


Fig. 179

<sup>23</sup> Emil **Lenz** (1804-1865) war ein deutsch-estnischer Physiker. Er befasste sich hauptsächlich mit Problemen der Elektrotechnik. Unter anderem entdeckte er im Jahr 1830, dass ein Gleichstrom-Elektromotor auch als Generator funktioniert.

## 4.4 Generatoren

Generatoren sind Maschinen, mit welchen durch mechanische Arbeit elektrische Energie gewonnen werden kann. Das Prinzip wurde bereits in Par. 4.1.1. dargestellt. Um eine ausreichend große Spannung zu erzeugen wird eine Spule mit vielen Windungen anstatt einer einzelnen Leiterschleife gedreht. Wenn die Windungszahl  $N$  beträgt, dann ist die maximale Spannung  $U_{max} = 2 \cdot N \cdot B \cdot d \cdot \pi \cdot f \cdot s$

Bei kleinen Generatoren wird das Magnetfeld durch einen Dauermagnet erzeugt. Bei großen Generatoren geschieht das durch die sogenannten Erregerspulen, mit denen man sehr große Magnetfelder erzeugen kann. Ein Nachteil dieses Systems ist, dass für die Erzeugung des Magnetfeldes eine Spannungsquelle benötigt wird, um den Strom in den Erregerspulen zu erzeugen. Das kann eine Batterie sein, das Stromnetz oder auch der Generator selber.

Wenn während der Herstellung der Eisenkern der Erregerspulen magnetisiert wird, dann bleibt ein schwaches Magnetfeld auch ohne Strom erhalten. Wenn sich dann die Rotorspule in diesem Feld dreht, wird eine geringe Spannung induziert. Wenn die Erregerspulen an diese Spannung angeschlossen sind, dann entsteht ein Strom, der das Magnetfeld und folglich auch die induzierte Spannung erhöht. Die Erregerspulen können in Reihe oder parallel zu Rotor-spule geschaltet sein.

### 4.4.1 Gleichspannungsgeneratoren

Um eine Gleichspannung zu erzeugen wird ein Kommutator benötigt. In Fig. 181 ist ein Generator dargestellt, dessen Erregerspule in Reihe zur Rotorspule geschaltet ist (Reihenschlussmaschine). Das heißt, der gesamte Strom, der durch die induzierte Spannung im Rotor erzeugt wird zu den Verbrauchern und durch die Erregerspule fließt. Wenn keine Verbraucher angeschlossen sind, dann ist die erzeugte Spannung sehr gering, weil nur das Restfeld im Eisenkern wirksam ist.

Das Magnetfeld nimmt mit der Stromstärke zu, folglich wird die erzeugte Spannung um so größer, je mehr Verbraucher angeschlossen sind.

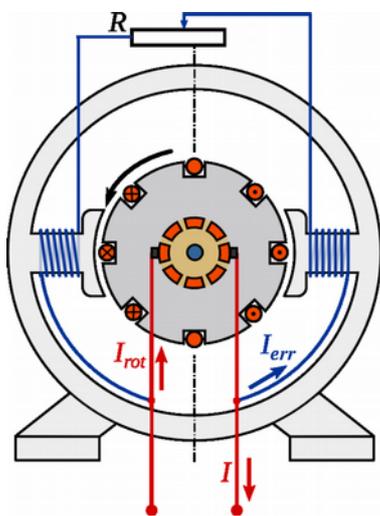


Fig. 182: Nebenschlussmaschine

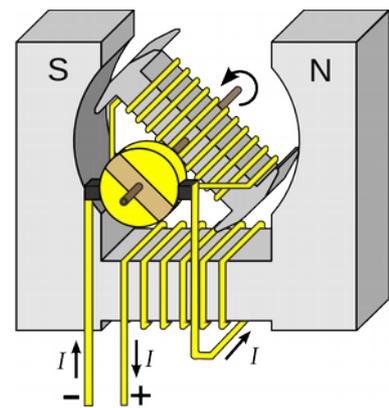


Fig. 181: Gleichspannungsgenerator als Reihenschlussmaschine

Fig. 182 zeigt einen Generator, dessen Erregerspulen parallel zur Rotorspule geschaltet sind (Nebenschlussmaschine). Das bedeutet, dass der Strom, der durch die Induktionsspannung in der Rotorspule erzeugt wird, teils zu den Verbrauchern und teils durch die Erregerspulen fließt.  $I_{rot} = I + I_{err}$

Dieses System hat den Vorteil, dass das Magnetfeld und somit die erzeugte Spannung unabhängig von der Belastung des Generators geregelt werden können.

Große Generatoren werden häufig als sogenannte Verbundmaschinen gebaut. Sie haben eine Reihenschluss- und eine Nebenschlusswicklung. Auf diese Weise wird sowohl die selbstregulierende Eigenschaft der Reihenschaltung als auch die gute Regelmöglichkeit der Parallelschaltung genutzt.

Alle Gleichspannungsgeneratoren funktionieren auch als Motor.

### 4.4.2 Wechselspannungsgeneratoren

Es ist bereits gezeigt worden, dass in einer in einem Magnetfeld rotierenden Leiterschleife eine Wechselspannung induziert wird. Um die erzeugte Spannung abzunehmen, sind Bürsten und Kollektorringe erforderlich (Fig. 183). Die Ringe und die Bürsten werden durch den Betrieb abgenutzt.

In Fig. 184 ist ein Generatorprinzip dargestellt, bei welchem die Induktionsspule stehen bleibt, und der Magnet rotiert. Auf diese Weise ändert sich das Magnetfeld in der Spule von einem positiven Maximum zu einem negativen Maximum und in der Spule wird eine Wechselspannung induziert, deren Frequenz gleich der Drehfrequenz des rotierenden Magneten ist.

In Elektrizitätswerken werden normalerweise Generatoren mit feststehenden Induktionsspulen verwendet. Sie haben den Vorteil, dass die relativ großen Spannungen und Ströme von der feststehenden Spule (Stator) leichter und sicherer abgenommen werden können als von der rotierenden Spule (Rotor). Dadurch können Verluste durch Funkenüberschlag an den Bürsten und durch abgenutzte Kollektorringe vermieden werden.

Bei den großen Generatoren in Elektrizitätswerken ist der Rotor nicht ein Dauermagnet, sondern ein Elektromagnet (Fig. 185), welcher eine Gleichspannungsquelle benötigt um das Magnetfeld zu erzeugen. Dafür wird normalerweise ein kleiner Gleichspannungsgenerator (Erregermaschine) verwendet, welcher von derselben Welle angetrieben wird, die den Rotor der Hauptmaschine bewegt.

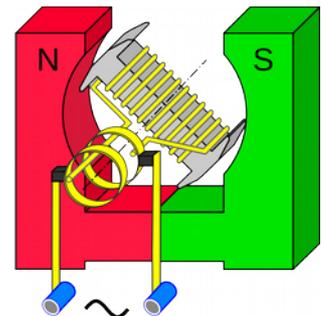


Fig. 183

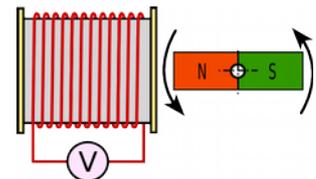


Fig. 184

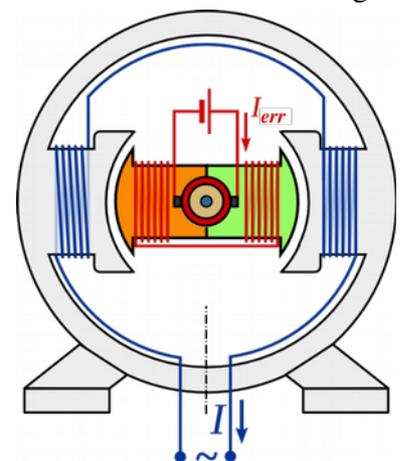


Fig. 185: Wechselspannungsgenerator

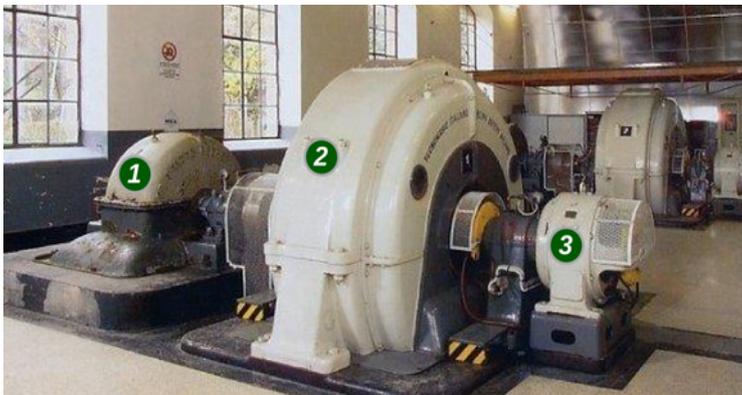


Fig. 186: 1) Turbine - 2) Generator - 3) Erregermaschine

### 4.4.3 Dreiphasenstrom (Drehstrom)

Fig. 187 zeigt das Schema eines Generators für Dreiphasenstrom. In den Spulen werden Wechselspannungen induziert, welche untereinander eine Phasenverschiebung von einem Drittel Periode (=  $120^\circ$ ) aufweisen. Dreiphasenstrom wird hauptsächlich für die Energieübertragung und für große Elektromotoren verwendet. Der Grund dafür ist, dass der Materialbedarf für die Übertragungslinien und die Transformatoren geringer ist und die elektrische Energie besser genutzt wird.

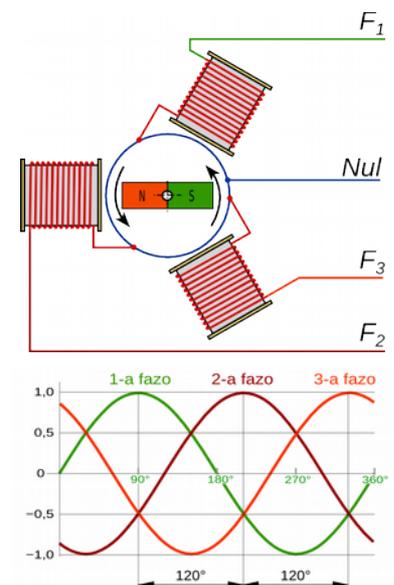


Fig. 187

## 4.5 Transformator

Die Übertragung der elektrischen Energie erfolgt derzeit fast ausschließlich durch Wechselspannung, weil dadurch die Spannung durch **Transformatoren** an die jeweilige Nutzung angepasst werden kann. Das ist sehr wichtig, weil einerseits im Übertragungsnetz durch eine hohe Spannung die Verluste reduziert werden und andererseits eine zu hohe Spannung beim Verbraucher gefährlich wäre.



Fig. 189: Transformator in einem Kraftwerk



Fig. 188: nahe am Verbraucher

Mit Hilfe von Transformatoren wird die Spannung auf bis zu 220 kV hinauf transformiert und dann in der Nähe der Endverbraucher auf 400 V oder 230 V herunter transformiert.

### 4.5.1 Funktionsprinzip des Transformators

Wenn Wechselstrom durch eine Spule fließt, dann entsteht in der Umgebung der Spule ein magnetisches Wechselfeld, das sich periodisch zwischen einem positiven und einem negativen Maximum ändert. Wenn sich in der Nähe dieser Spule (Feldspule) eine andere Spule (Induktionsspule) befindet, dann wird auch diese Spule durch einen Teil des magnetischen Flusses der Feldspule durchdrungen (siehe Fig. 190). Nachdem sich dieser Fluss dauernd ändert, wird eine Wechselspannung induziert. Man sagt, die Spulen sind induktiv gekoppelt.

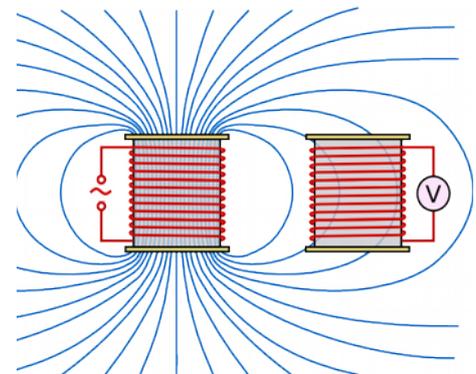


Fig. 190

Die induktive Kopplung ist viel wirksamer, wenn sich die beiden Spulen auf dem selben Eisenkern befinden. Dann ist der magnetische Fluss in beiden Spulen nahezu gleich.

An die erste Spule (Primärspule) wird die zu transformierende Wechselspannung angeschlossen. An der zweiten Spule (Sekundärspule) wird die transformierte Wechselspannung abgenommen. Die Übertragung der Energie von einer Spule auf die andere erfolgt nur über das Magnetfeld. Elektrisch sind die Spulen nicht verbunden.

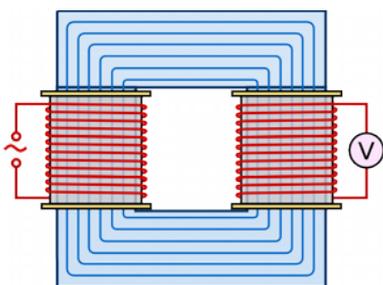


Fig. 191

Ein Transformator speichert keine Energie. Von der an der Primärspule zugeführten Energie geht ein kleiner Teil durch magnetische und elektrische Verluste verloren. Der große Rest wird an die Sekundärspule abgegeben.

### 4.5.2 Zusammenhang zwischen Spannung und Strom beim Transformator

#### Versuch 20 Verhältnis der Spannungen

Zweck des Versuches ist es, das Verhältnis zwischen den Spannungen am Transformator und den Windungszahlen der Spulen herauszufinden. Gemäß dem Versuchsaufbau von Fig. 192 ist an der Sekundärspule nur eine Voltmeter angeschlossen und folglich fließt dort kein Strom.

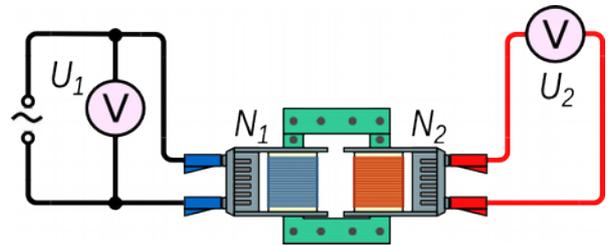


Fig. 192

Zunächst untersucht man, wie die Sekundärspannung von der Primärspannung abhängt und anschließend wird die Abhängigkeit der Sekundärspannung von den Windungszahlen der Primär- und Sekundärspule untersucht.

Wenn man einen Transformator mit "gutem"<sup>(24)</sup> Eisenkern verwendet, dann erhält man die Ergebnisse der Tabelle 9.

$N_1$	$N_2$	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_1/U_2$	$N_1/N_2$
1200	600	9,6	4,9	2,0	2,0
1200	600	12,8	6,4	2,0	2,0
1200	900	12,8	10	1,3	1,3
1200	300	12,8	3,2	4,0	4,0
600	300	12,8	6,4	2,0	2,0

Tab. 9

Es zeigt sich dass  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$

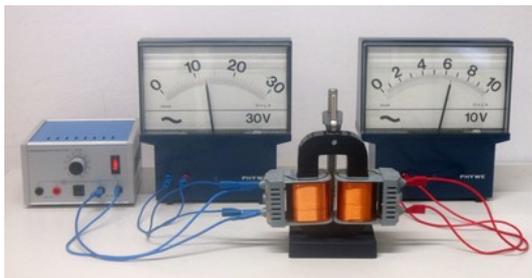


Fig. 193

Das Ergebnis von Versuch 20 gilt allgemein. Bei unbelasteten Transformatoren, d.h. Transformatoren bei denen in der Sekundärspule kein Strom fließt, ist der Quotient zwischen der Primär- und der Sekundärspannung gleich dem Quotienten zwischen den Windungszahlen der entsprechenden Spulen.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \rightarrow \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

Wenn an der Sekundärspule ein Verbraucher angeschlossen ist, dann fließt Strom und elektrische Energie wird von der ersten auf die zweite Spule übertragen.

Ein idealer Transformator ist verlustfrei ( $\eta = 1$ ) und die gesamte Energie die an der ersten Spule zugeführt wird, kann an der zweiten abgenommen werden. Unter diesen Bedingungen gilt:  $E_{el1} = E_{el2}$

$$U_1 \cdot I_1 \cdot t = U_2 \cdot I_2 \cdot t \quad \rightarrow \quad U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$$

Daraus ergeben sich mit der obigen Gleichung für einen **idealen Transformator**

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

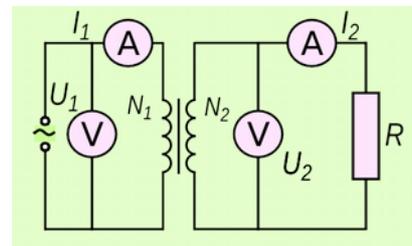


Fig. 194

Es zeigt sich, dass wenn die Spannung abnimmt, die Stromstärke im selben Maße zunimmt und umgekehrt. Bei Transformatoren welche unter den Planungsbedingungen arbeiten ist der Wirkungsgrad auch in der Praxis sehr hoch, und dann sind diese Formeln eine gute Näherung. Die auftretenden Verluste werden im folgenden Versuch untersucht.

<sup>24</sup> "Gute" Eisenkerne sind diejenigen, welche den magnetischen Fluss möglichst verlustfrei von der Primärspule auf die Sekundärspule übertragen. Das ist leichter möglich, wenn die Ecken des Eisenkerns abgerundet sind (siehe Fig. 193).

### 4.5.3 Verluste des Transformators

#### Versuch 21 Wirkungsgrad des Transformators

Fig. 195 zeigt das Schema eines Versuchs, welcher geeignet ist, um den Wirkungsgrad eines Transformators zu bestimmen.

Während des Versuchs werden der Wert von  $U_1$  und die Windungszahlen der Spulen konstant gehalten. Mit Hilfe des Schiebewiderstands wird der Strom  $I_2$  verändert. Mit den gemessenen Werten von Spannung und Stromstärke werden die zugeführte und die genutzte Leistung berechnet und daraus der Wirkungsgrad.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1}$$

Die Werte von Tab. 10 zeigen, dass der Wirkungsgrad eines Transformators von der Belastung abhängt. Er ist in dem Bereich am größten, für welchen der Transformator geplant wurde.

Wegen der verschiedenen Verluste sind Transformatoren in der Praxis nie ideal, aber es werden Wirkungsgrade von bis zu 99% erreicht, wenn sie unter Planungsbedingungen arbeiten.

Die Verluste setzen sich zusammen aus den Verlusten im Eisenkern (Eisenverluste) und aus den Verlusten welche auf den Widerstand der Spulendrähte zurückzuführen sind (Kupferverluste).

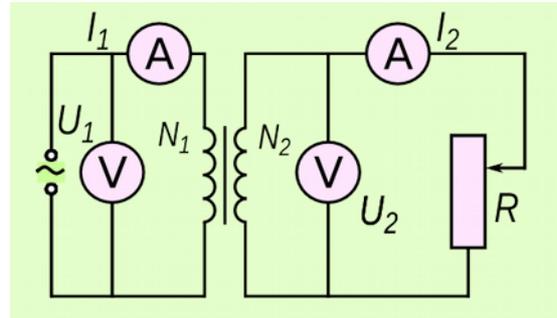


Fig. 195

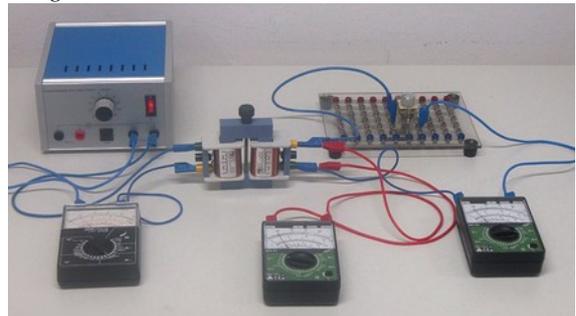


Fig. 196

$U_1 = 12,5 \text{ V}$

R [Ω]	$U_2$ [V]	$I_1$ [V]	$I_2$ [V]	$P_1$ [W]	$P_2$ [W]	$\eta$
2	0,5	120	220	1,50	0,11	0,07
25	3,6	83	143	1,04	0,5148	0,50
50	4,9	60	97	0,75	0,4705	0,63
100	5,5	36	50	0,45	0,275	0,61
200	6,0	30	29	0,38	0,174	0,46
∞	6,2	12	0	0,15	0	0,00

Tab. 10

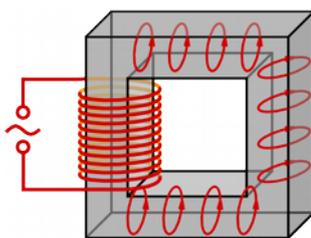


Fig. 198

Die Eisenverluste sind einerseits auf die so genannten Wirbelströme und andererseits auf die Ummagnetisierung zurückzuführen.

Die Wirbelströme entstehen, weil der Kern aus leitendem Material (Eisen) besteht und deshalb Leiterkreise entstehen können, in welchen sich das Magnetfeld ändert und folglich eine Spannung induziert wird, welche die Wirbelströme hervorruft (siehe Fig. 198). Diese Verluste können durch geblätterte Eisenkerne, welche aus untereinander isolierten dünnen Blechen bestehen, verringert werden (siehe Fig. 197). Die Ummagnetisierungsverluste entstehen, weil sich das Magnetfeld periodisch umkehrt. Die Richtung der Elementarmagnete muss dauernd geändert werden und dafür ist Energie erforderlich.

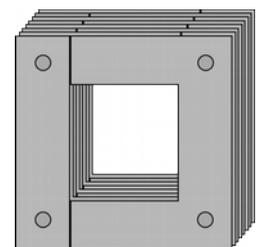


Fig. 197

Die Kupferverluste sind auf den Widerstand der Spulen zurückzuführen, weil ein Teil der zugeführten Energie benötigt wird um den Leitungswiderstand in der Primär- und in der Sekundärspule zu überwinden. Die Kupferverluste überwiegen, wenn der Transformator voll belastet ist (= großer Strom in den Spulen).

### 4.5.4 Übertragung der elektrischen Energie

#### Versuch 22 Verluste in Abhängigkeit von der Spannung

In diesem Modellversuch werden die Verluste bei der Übertragung elektrischer Energie mit niedriger bzw. hoher Spannung untersucht.

Es wird angenommen, dass ein Elektrizitätswerk Energie zu einem 6 km entfernten Verbraucher liefert. Die Kupferleitungen haben einen Querschnitt von 10 mm<sup>2</sup>.

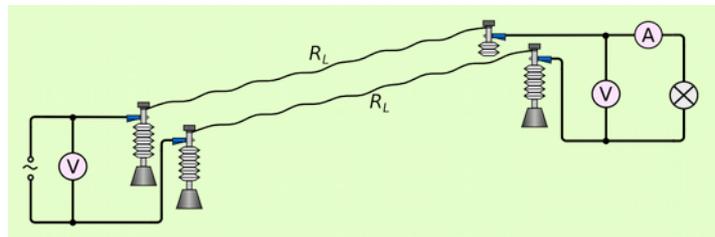


Fig. 199

Der Widerstand der Leitungen wird somit  $R_K = \rho_{Cu} \cdot \frac{l}{A} = 0,017 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{6000 \text{ m}}{10 \text{ mm}^2} = 10,2 \Omega$

Im Modell werden Drähte aus Konstantan mit einem Durchmesser von 0,2 mm ( $A = 0,0314 \text{ mm}^2$ )

verwendet. Ihre Länge beträgt folglich  $l = \frac{R_K \cdot A}{\rho_{Kn}} = \frac{10,2 \Omega \cdot 0,0314 \text{ mm}^2}{0,5 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}} = 0,64 \text{ m}$

Die Spannungsquelle liefert eine Wechselspannung von 12 V. Der Verbraucher ist eine Lampe mit den Nennwerten 12V / 25W.

Zunächst wird die Energie mit einer niedrigen Spannung übertragen (siehe Fig. 199). Man stellt fest, dass die Lampe nicht leuchtet. Das kommt daher, dass die Lampe mit den Zuleitungen in Reihe geschaltet ist. Der Nennstrom der Lampe und der entsprechende Nennwiderstand sind

$$I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{25 \text{ W}}{12 \text{ V}} = 2,1 \text{ A} \quad \rightarrow \quad R_L = \frac{U_N}{I_N} = \frac{12 \text{ V}}{2,1 \text{ A}} = 5,8 \Omega$$

Die auftretende Stromstärke  $I = \frac{U}{R_L + 2 \cdot R_K} = \frac{12 \text{ V}}{5,8 \Omega + 20,4 \Omega} = 0,46 \text{ A}$  reicht nicht aus um die Lampe zum Leuchten zu bringen.

Die Spannung an der Lampe beträgt  $U_L = R_L \cdot I = 5,8 \Omega \cdot 0,46 \text{ A} = 2,6 \text{ V}$ . Ein Großteil der Spannung (und der Energie) geht in den Zuleitungen "verloren".

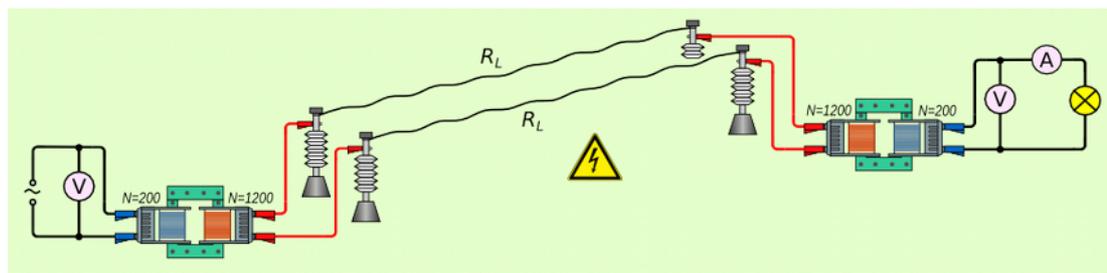


Fig. 200

Im zweiten Versuch wird die Energie mit Hochspannung übertragen und es werden Transformatoren eingesetzt (siehe Fig. 200). Jetzt leuchtet die Lampe, die verfügbare Spannung reicht aus.

Die Ergebnisse von Versuch 22 sind leicht zu verstehen, wenn man die Stromstärken in den Übertragungsleitungen betrachtet. Durch den Transformator wird die Spannung in den Übertragungsleitungen vervielfacht. Folglich ist die Stromstärke bei gleicher übertragener Leistung nur noch ein Fünftel ( $P = U \cdot I$ ) Deshalb reduzieren sich die Leitungsverluste auf ein Fünfundzwanzigstel ( $P_v = R_x I^2$ ). Ein Gutteil der zugeführten Leistung ist also nun an der Lampe verfügbar, obwohl durch die Transformatoren eine Verlustquelle dazu gekommen ist.

Beispiel 37

Die Lampe von Fig. 201 hat die Nennwerte 4 V / 40 mA. Der Widerstand der Leiter beträgt 50 Ω.

Wie groß muss die Spannung der Spannungsquelle sein, damit die Lampe voll aufleuchtet?

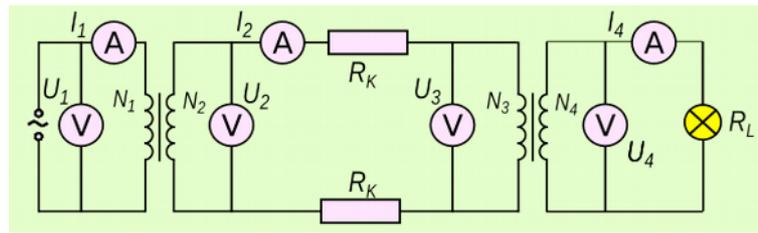


Fig. 201

Es werden ideale d.h. verlustfreie Transformatoren angenommen.

Lösung

$$U_4 = 4V \quad I_4 = 0,04 A \quad R_L = 50\Omega \quad N_1 = 600 \quad N_2 = 12000 \quad N_3 = 12000 \quad N_4 = 600$$

Wenn in den Transformatoren keine Verluste auftreten erhält man

$$U_3 = \frac{N_3}{N_4} \cdot U_4 = \frac{12000}{600} \cdot 4V = 80V \quad I_2 = I_3 = \frac{N_4}{N_3} \cdot I_4 = \frac{600}{12000} \cdot 0,04 A = 0,002 A$$

$$U_2 = U_3 + 2 \cdot R_L \cdot I_2 = 80V + 2 \cdot 50\Omega \cdot 0,002 A = 80,2V$$

$$U_1 = \frac{N_1}{N_2} \cdot U_2 = \frac{600}{12000} \cdot 125V = 4,01V$$

Wegen der Verluste wird in der Praxis die benötigte Spannung etwas größer.

Um die Verluste klein zu halten wird elektrische Energie über Hochspannungsleitungen mit Spannungen bis 380 kV übertragen.

Für die übertragenen elektrische Leistung gilt  $P = U \cdot I$ . Folglich ist für die Übertragung einer bestimmten Leistung die Stromstärke um so kleiner, je größer die Spannung ist.

Die Leistung welche in den Leitungen "verloren" geht ist

$$P_K = U_K \cdot I = R_K \cdot I \cdot I = R_K \cdot I^2$$

Wenn man die Spannung auf das 100-fache erhöht, dann reduziert sich die Stromstärke auf ein Hundertstel und die Verluste betragen nur noch ein Millionstel des vorherigen Betrags.

Deshalb wird die Spannung der Generatoren im Umspannwerk hochtransformiert, die Energie wird mit möglichst hoher Spannung übertragen und erst kurz vor dem Verbraucher wird die Spannung auf 400 V bzw. 230 V herunter transformiert (siehe Fig. 202).

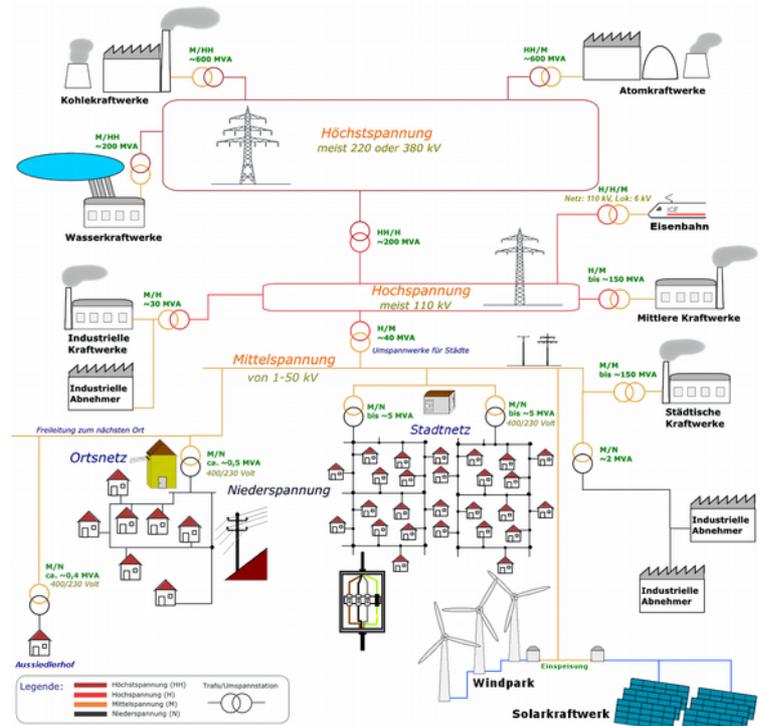


Fig. 202: Schema der elektrischen Energieübertragung (Q:Wikipedia)

## 4.6 Aufgaben

- Ein Metallrahmen mit  $a = 30 \text{ cm}$  und  $b = 40 \text{ cm}$  (siehe Fig. 203) wird in einer Zeit von  $0,2 \text{ s}$  in eine Magnetfeld von  $50 \text{ mT}$  geschoben.
  - Wie groß ist die induzierte Spannung während des Einschiebens?
  - Wie groß ist die Stromstärke während des Einschiebens, wenn der Rahmen einen Widerstand von  $11,9 \text{ m}\Omega$  aufweist?
  - Berechne die Kraft, die aufgebracht werden muss, die verrichtete Arbeit und die umgesetzte elektrische Energie!

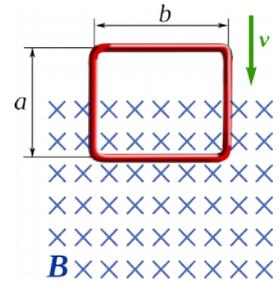


Fig. 203

- Der Rotor des Generators von Fig. 204 mit  $d = 3 \text{ cm}$  und  $s = 4 \text{ cm}$  hat 450 Windungen. Der gesamte Widerstand der Windungen beträgt  $5,4 \Omega$ . Der Rotor dreht sich mit einer Frequenz von  $2 \text{ Hz}$  in einem Magnetfeld von  $200 \text{ mT}$ . An den Generator ist eine Lampe angeschlossen, deren Widerstand  $10 \Omega$  beträgt. Berechne die Stromstärke sowie das Drehmoment, welches erforderlich ist um den Rotor zu drehen.

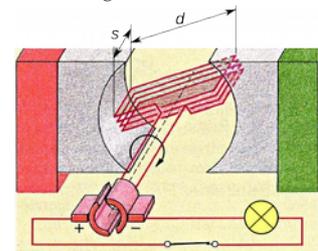


Fig. 204

- Ein Verbraucher benötigt eine Leistung von  $15 \text{ kW}$  bei einer Spannung von  $230 \text{ V}$ . Es wird angenommen, dass der Verbraucher direkt an das Elektrizitätswerk angeschlossen ist und dass die Anschlussleitungen einen Gesamtwiderstand von  $50 \Omega$  haben.
  - Wie groß muss die Spannung des Generators sein und wie groß ist die Verlustleistung in den Zuleitungen?
  - Die Spannung des Generators wird mit einem idealen Transformator auf  $230 \text{ kV}$  erhöht und unmittelbar vor dem Verbraucher durch einen weiteren idealen Transformator auf  $230 \text{ V}$  verringert (siehe Fig. 201). Wie groß ist die Verlustleistung in den Zuleitungen in diesem Fall?

- Der Widerstand des Nagels in Fig. 205 beträgt  $5 \text{ m}\Omega$ . Der Transformator hat eine Primärspule mit 600 Windungen und eine Sekundärspule mit 6 Windungen. Wie groß ist die Stromstärke im Nagel, wenn die Primärspule an  $230 \text{ V}$  angeschlossen wird. Der Transformator wird als ideal, d.h. verlustfrei betrachtet.

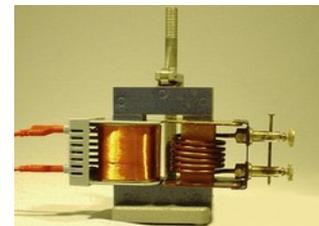


Fig. 205

- Der Alu-Ring auf der rechten Seite des Eisenkerns von Fig. 206 stellt die Sekundärspule des Transformators dar. Er hat einen Widerstand von  $0,3 \text{ m}\Omega$ . Die Primärspule hat 600 Windungen. Wie groß ist die elektrische Leistung welche auf den Ring übertragen wird, wenn die Primärspule an  $230 \text{ V}$  angeschlossen wird? Der Transformator wird als ideal, d.h. verlustfrei betrachtet.



Fig. 206

### Antworten

- Die Spannung beträgt  $30 \text{ mV}$  und die Stromstärke  $2,52 \text{ A}$ . Die erforderliche Arbeit beträgt  $15 \text{ mJ}$ .
- Die Stromstärke beträgt  $88 \text{ mA}$  und das erforderliche Drehmoment  $0,95 \text{ Ncm}$ .
- Es ist eine Generatorspannung von  $3490 \text{ V}$  notwendig. In den Zuleitungen gehen  $213 \text{ kW}$  "verloren".
  - Mit Transformatoren ergibt sich ein Verlust von  $0,21 \text{ W}$ .
- Die Stromstärke beträgt  $4,6 \text{ A}$ .
- Die Leistung ist  $490 \text{ W}$ .